THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Gérard LALLEMENT

1ère **THÈSE:** Demi-groupes réguliers.

2ème **THÈSE:** Propositions données par la faculté.

Soutenues le 9 juin 1966 devant la commission d'examen.

M. DUBREIL — ***Président***

M. LELONG
M. SCHÜTZENBERGER } ***Examinateurs***

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544322_0029

LALLEMENT, GÉRARD
1967
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LXXVII, pp. 47-130

Demi-groupes réguliers.

par GÉRARD LALLEMENT (à Paris)

Résumé. - *Ce travail comprend quatre parties pouvant être lues indépendamment:* I) *Représentations complètes d'un demi-groupe par des transformations partielles sur ensemble.* II) *Translations partielles. Représentation canonique d'un demi-groupe régulier. Problèmes de structure* (*Produits sous-directs de demi-groupes complètement* 0*-simples*). III) *Congruences sur les demi groupes réguliers.* IV) *Demi-groupes complètement* 0*-simples.*

INTRODUCTION

Les demi-groupes réguliers sont une généralisation naturelle du demi-groupe multiplicatif des anneaux réguliers de J. VON NEUMANN. Bien qu'aucune théorie ne rende compte de la forme générale de leur structure, certains d'entre eux ont pu être décrits de façon satisfaisante au point de vue de la théorie des demi-groupes. C'est le cas par exemple des demi-treillis de groupes (CLIFFORD, [3]) et des demi-groupes complètement 0-simples (SUSKEWITCH, [33], REES, [26]). Parallèlement au problème de structure se pose celui de l'étude du treillis des congruences, justifié soit par des nécessités de classification des demi-groupes, soit par l'idée de développer une théorie comparable à celle des idéaux d'un anneau. Ce sont ces deux questions — structure, congruences — que nous avons abordées successivement.

En ce qui concerne les problèmes de structure (parties I et II), le but de ce travail est d'abord de dégager un cadre général permettant d'unifier les divers problèmes qui peuvent se poser et d'entreprendre ensuite l'étude d'un problème de structure particulier (celui des produits sous-directs de demi-groupes complètement 0-simples) que la théorie impose de façon naturelle. Le cadre général, qui n'est d'ailleurs pas spécifique aux demi-groupes réguliers, nous est fourni par la notion de représentation complète d'un demi-groupe D quelconque, par des transformations partielles sur un ensemble Ω. Une représentation complète est la donnée d'un couple (P, Q) où P est un homomorphisme, Q un anti-homomorphisme de D dans le demi-groupe $\mathcal{T}_\Omega$ des transformations partielles sur Ω. Le résultat essentiel de la partie I donne la forme générale des représentations commutantes symétriques [1]:

---

[1] Avec les notations du texte, en introduisant les relations binaires $\tau_P = \bigcup_{x \in D} P(x)$ et $\tau_Q = \bigcup_{x \in D} Q(x)$ sur Ω, (P, Q) est commutante si $P(x)Q(y) = Q(y)P(x)$, d'où $\tau_P \cdot \tau_Q = \tau_Q \cdot \tau_P$, symétrique si $\tau_P = \tau_P^{-1}$, et $\tau_Q = \tau_Q^{-1}$, bitransitive si $(\tau_P \cdot \tau_Q) \cup \tau_P \cup \tau_Q = \Omega \times \Omega$. Un demi-groupe D ayant une représentation (P, Q) commutante, bitransitive, fidèle est dit bitransitif.

toute représentation commutante symétrique est décomposable de façon unique en somme de représentations commutantes, symétriques, bitransitives. En observant alors qu'un demi-groupe régulier a une représentation commutante symétrique *fidèle* par des translations partielles sur lui-même (c'est la version «transformations partielles» du théorème de représentation par des matrices monomiales de SCHÜTZENBERGER, [2], par. 3.6), on démontre que tout demi-groupe régulier est isomorphe à un produit sous-direct de demi-groupes réguliers bitransitifs. Ceci nous conduit à l'étude des produits sous-directs de demi-groupes complètement 0-simples que nous caractérisons par des propriétés portant sur les $\mathfrak{J}$-classes de GREEN. Les caractérisations obtenues se traduisent par des théorèmes de structure dans le cas des demi-groupes réunion de groupes et dans le cas de certains demi-groupes à série principale. Il est remarquable de constater que dans chacun de ces cas particuliers la structure est obtenue à partir d'un système inductif d'homomorphismes de demi-groupes complètement 0-simples, généralisant ainsi le résultat de CLIFFORD [3] sur les demi-treillis de groupes (ces derniers apparaissant comme les produits sous-directs de groupes avec zéro).

Pour l'étude des congruences (parties III et IV), la mise en évidence de propriétés de modularité ou de modularité affaiblie nous a paru être un des premiers impératifs. Dans cet ordre d'idées, nous avons pris pour point de départ la solution d'une conjecture de MUNN [20]: les congruences séparant les idempotents d'un demi-groupe régulier forment un sous-treillis complet modulaire du treillis des congruences. Parmi les conséquences de ce résultat, la plus importante est sans doute le fait que toute congruence est déterminée avec unicité par la donnée des classes des idempotents non nuls. C'est sur cette conséquence et sur une propriété de simplifiabilité affaiblie (²) qu'est basée la partie IV dans laquelle on étudie les homomorphismes d'un demi-groupe D quelconque sur un demi-groupe complètement 0-simple. La congruence nucléaire d'un tel homomorphisme φ s'exprime comme intersection des équivalences principales à droite et à gauche de P. DUBREIL, définies par les sous-demi-groupes images réciproques des idempotents non nuls de $\varphi(D)$. Il est alors possible de construire effectivement l'homomorphisme à partir du complexe K réunion de ces sous-demi-groupes et d'une décomposition matricielle [6'] liée à K. Appliquant la construction à un demi-groupe régulier de matrices de REES D, nous obtenons une description plus simple que celle de PRESTON [25] du treillis des congruences d'un demi-groupe complètement 0-simple. Nous démontrons notamment que ce treillis est semi-

(²) Cette propriété s'écrit: $ax = bx \neq o$ et $ya = yb \neq o \Rightarrow a = b$. Son utilisation permet d'obtenir rapidement des résultats sur les demi-groupes compacts ou même sur les anneaux. Par exemple on démontre de façon élémentaire qu'un anneau régulier (non supposé unitaire) dont tous les idempotents sont primitifs est un corps.

UNIV. LEIDEN BIBL.

modulaire au sens de MACLANE, ce qui confirme une conjecture faite par PRESTON [12]. D'autres applications des homomorphismes étudiés dans cette partie IV (demi-groupes à homomorphismes rétractés sur leur noyau, demi-groupes 0-simples avec des idéaux 0-minimaux d'un côté) mettent en évidence l'importance des décompositions matricielles qui fournissent chaque fois un schéma de la structure des demi-groupes étudiés.

L'étude des représentations complètes développée dans la partie I est inspirée des travaux de TULLY [35] et ŠAIN [27], [28]. Certains de leurs résultats sont des cas particuliers de ceux obtenus ici: il suffit pour les mettre en évidence de considérer les représentations complètes (P, Q) où Q est l'anti-représentation unité.

Les théorèmes de structure de II, en particulier les résultats concernant les demi-groupes et les arbres de demi-groupes complètement 0-simples sont liés à la notion d'extension idéale d'un demi-groupe (cf. [2] par. 4.4 et les exposés de GRILLET au Séminaire Dubreil-Pisot 1964-65).

Certaines conséquences des résultats obtenus dans III ont été développées par HOWIE et l'auteur [5]. Les congruences sur un demi-groupe complètement 0-simple (IV) ont été étudiées par MUNN ([2], par. 3.4), GLUSKIN [8], PRESTON [25]. L'originalité de la description donnée ici réside dans le fait qu'elle s'appuie sur la notion d'équivalence principale.

Pour les notions et les notations non explicitement définies au cours de ce travail, nous renvoyons le lecteur au livre de A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON [2] et au livre d'Algèbre de P. DUBREIL ([5], Chap. V B) pour ce qui concerne les équivalences principales. Une étude élémentaire du demi-groupe des transformations partielles sur un ensemble (utilisé dans la partie I) est présentée dans le livre de E. S. LJAPIN [15].

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur P. DUBREIL, qui a dirigé mon travail. Ses enseignements, ses conseils et l'attention qu'il a bien voulu porter à mes recherches, m'ont été d'un grand secours.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur M.P. SCHÜTZENBERGER, rapporteur de cette thèse, pour l'aide très efficace qu'il m'a apportée par ses suggestions et ses conseils concernant la rédaction.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur P. LELONG qui a bien voulu me proposer un second sujet de thèse et me guider dans sa préparation.

CHAPITRE I.

Représentations complètes d'un demi-groupe par des transformations partielles sur un ensemble.

1. - Définitions. Représentations complètes équivalentes.

Une relation binaire x entre deux ensembles Γ et Γ' ($x \subseteq \Gamma \times \Gamma'$) vérifiant la propriété: pour tout $\alpha \in \Gamma$, β et $\gamma \in \Gamma'$, $(\alpha, \beta) \in x$ et $(\alpha, \gamma) \in x$ impliquent $\beta = \gamma$, est appelée une application partielle de Γ dans Γ'. Une application partielle d'un ensemble Ω dans lui-même est appelée une *transformation partielle* sur Ω. La composition des relations binaires sur Ω induit sur l'ensemble des transformations partielles, une opération associative, qui fait de cet ensemble un demi-groupe avec zéro, noté $\mathcal{T}_\Omega$. $\mathcal{T}_\Omega$ a pour sous-demi-groupe le demi-groupe $\mathcal{A}_\Omega$ des transformations partout définies sur Ω, et la transformation identité pour élément neutre. Dans la suite, où il est question essentiellement de $\mathcal{T}_\Omega$, nous dirons «transformation» au lieu de «transformation partielle».

Un homomorphisme P d'un demi-groupe D quelconque dans $\mathcal{T}_\Omega$ est appelé une *représentation* de D par des transformations sur Ω. De même, une anti-représentation Q est un anti-homomorphisme de D dans $\mathcal{T}_\Omega$ (c'est-à-dire: pour tout x, $y \in D$, $Q(xy) = Q(y)Q(x)$). Une représentation complète correspond à la donnée du couple formé par une représentation P et une anti-représentation Q; plus précisément:

DÉFINITION 1.1. - *Une représentation complète (ou birepresentation) $\Phi = (P, Q)_\Omega$ d'un demi-groupe D par des transformations sur un ensemble Ω est un homomorphisme Φ de D dans $\mathcal{T}_\Omega \times \mathcal{T}_\Omega^*$ où $\mathcal{T}_\Omega^*$ est le demi-groupe dual* [3] *de $\mathcal{T}_\Omega$.*

Soit Ω un ensemble et Δ un demi-groupe; Ω est appelé un Δ-système à droite, s'il existe une application partielle de $\Omega \times \Delta$ dans Ω qui à tout élément $(\alpha, x) \in \Omega \times \Delta$ ayant une image dans Ω, associe $\alpha x \in \Omega$ de sorte que:

a) $\alpha(xy) \in \Omega \Rightarrow \alpha x \in \Omega$, $(\alpha x)y \in \Omega$ et $(\alpha x)y = \alpha(xy)$;

b) $\alpha x \in \Omega$ et $(\alpha x)y \in \Omega \Rightarrow \alpha(xy) \in \Omega$ et $(\alpha x)y = \alpha(xy)$.

A toute représentation P d'un demi-groupe D par des transformations sur Ω est associé canoniquement le D-système à droite défini par l'application partielle $(\alpha, x) \to \alpha x = \alpha P(x)$. Inversement, la donnée d'un D-système à droite Ω définit une représentation de D par des transformations sur Ω.

---

[3] Le dual d'un demi-groupe $D = (D, \cdot)$ est le demi-groupe $D^* = (D, *)$ de même support que D et d'opération $*$ définie par $x * y = y \cdot x$.

Soient Ω et Ω' deux Δ–systèmes à droite ; *une surjection* φ *de* Ω *sur* Ω' *est dite un homomorphisme du* Δ*–système* Ω *sur le* Δ*–système* Ω' *si et seulement si il existe une surjection* θ_φ *de* Δ *sur lui–même, telle que* $x\varphi = \varphi\theta_\varphi(x)$ *pour tout* $x \in \Delta$. L'égalité précédente est celle de deux applications partielles de Ω dans Ω' considérées comme relations binaires (4). Si φ est une bijection et un homomorphisme, il est dit isomorphisme de Ω sur Ω' (considérés comme Δ–systèmes). La surjection θ_φ est alors un automorphisme de Δ.

Deux représentations P, P' d'un demi–groupe D par des transformations sur Ω et Ω' respectivement, sont dites *équivalentes* si et seulement si les D–systèmes asssociés sont isomorphes, c'est–à–dire s'il existe une bijection φ de Ω sur Ω' et une application θ (qui est un isomorphisme) de $P(D)$ sur $P'(D)$ tels que pour tout $x \in D$, $P(x) \cdot \varphi = \varphi \cdot \theta[P(x)]$.

DÉFINITION 1.2. – *Deux représentations complètes* $\Phi = (P, Q)$ *et* $\Phi' = (P', Q')$ *d'un demi–groupe* D *par des transformations sur* Ω *et* Ω' *respectivement, sont équivalentes au sens large, si* P *et* P' *sont deux représentation équivalentes et* Q, Q' *deux anti–représentations équivalentes.* Il existe alors des bijections φ et ψ de Ω sur Ω', des isomorphismes θ_φ, θ'_ψ de $P(D)$ sur $P'(D)$ et $Q(D)$ sur $Q'(D)$ respectivement, tels que :

$$\forall\, x \in D,\ P(x)\varphi = \varphi\theta_\varphi[P(x)] \quad \text{et} \quad Q(x)\psi = \psi\theta'_\psi[Q(x)].$$

Lorsque $\varphi = \psi$, Φ *et* Φ' *sont dites équivalentes.*

Soit $\Phi = (P, Q)_\Omega$ une représentation complète de D par des transformations sur Ω et soit $\Omega_0 \subset \Omega$. Posons $\Omega' = (\Omega \setminus \Omega_0) \cup \overline{\Omega}_0$ où $\overline{\Omega}_0$ est l'image de Ω_0 par une bijection φ_0. On prolonge la bijection φ_0 en une bijection φ de Ω sur Ω, en posant $\alpha\varphi = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Omega \setminus \Omega_0$, et on définit une représentation complète $(P', Q')_{\Omega'}$ par $P'(x) = \varphi^{-1}P(x)\varphi$ et $Q'(x) = \varphi^{-1}Q(x)\varphi$ pour tout $x \in D$. Il résulte alors de la définition 1.2, que $(P, Q)_\Omega$ et $(P', Q')_{\Omega'}$ sont deux représentations complètes équivalentes (5). Ce procédé permet de remplacer deux répresentations $(P_1, Q_1)_{\Omega_1}$ et $(P_2, Q_2)_{\Omega_2}$ telles que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ par deux

(4) Rappelons que pour un élément $x \in \Delta$, il existe une transformation partielle y de Ω' dans lui-même telle que $x\varphi = \varphi y$, si et seulement si : $\forall\, \alpha, \beta \in \Omega$ tels que αx et βx soient définis, $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow (\alpha x)\varphi = (\beta x)\varphi$. La transformation y est alors unique et $y = \varphi^{-1}x\varphi$. C'est ce résultat, établi pour les applications partout définies, qu'utilise GRILLET pour définir les homomorphismes de tas ([11], prop. 1, p. 11). La démonstration relative aux transformations partielles n'offre aucune difficulté. La surjection θ_φ du texte est l'application $x \to \varphi^{-1}x\varphi$.

(5) On a : $\theta_\varphi[P(x)] = P'(x)$ et $\theta'_\varphi[Q(x)] = Q'(x)$. Il convient de noter que dans ce cas les représentations complètes équivalentes ont aussi même noyau (cf. § 4). Deux représentations (complètes ou non) équivalentes et ayant même noyau peuvent être appelées n-équivalentes. Dans la suite chaque fois qu'il sera question d'équivalences de représentations, il s'agira de n-équivalences.

représentations équivalentes relatives à des ensembles Ω'_1 et Ω'_2 tels que $\Omega'_1 \cap \Omega'_2 = \emptyset$ (prendre par exemple $\Omega'_2 = (\Omega_2 \setminus \Omega_0) \cup \overline{\Omega}_0$ où $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2$). Ceci s'étend sans modification à un nombre quelconque de représentations $(P_i\ Q_i)_{\Omega_i}$ relatives à des ensembles Ω_i non nécessairement disjoints deux à deux.

2. - Relation de transitivité. Décomposition d'une représentation complète en somme.

On appelle relation de transitivité d'une représentation P_Ω d'un demi-groupe D, la relation binaire $\tau_P = \bigcup_{x \in D} P(x)$. Cette relation est transitive. Si $\tau_P = \Omega \times \Omega$, la représentation P est dite transitive. On définit de même une relation de transitivité τ_Q pour une anti-représentation Q_Ω.

DÉFINITIONS 1.3. - *a) On appelle relation de transitivité d'une représentation complète* $\Phi = (P, Q)_\Omega$, *la relation transitive* τ_Φ *engendrée par les relations de transitivité* τ_P, τ_Q *de* P *et* Q (τ_Φ est la fermeture transitive de $\tau_P \cup \tau_Q$ dans le treillis des relations binaires sur Ω).

b) Φ *est dite cyclique s'il existe un élément* $\alpha \in \Omega$ *tel que* $\Omega = \alpha \cup \alpha\tau_\Phi$, *bitransitive si* $\tau_\Phi = \Omega \times \Omega$.

Soit Ω un ensemble et Ω_ζ l'ensemble $\Omega \cup \{\zeta\}$ où $\zeta \notin \Omega$. Notons $\mathfrak{A}^\zeta_{\Omega_\zeta}$ le sous-demi-groupe formé par les applications de $\mathfrak{A}_{\Omega_\zeta}$ laissant ζ fixe et

$$A^\zeta_\Omega = \mathfrak{A}^\zeta_{\Omega_\zeta} \times (\mathfrak{A}^\zeta_{\Omega_\zeta})^*.$$

PROPOSITION 1.4. - *La donnée d'une représentation complète d'un demi-groupe* D *par des transformations sur* Ω *est équivalente à la donnée d'un homomorphisme de* D *dans* A^ζ_Ω.

DÉMONSTRATION. - Soit P_Ω une représentation de D et soit $\zeta \notin \Omega$. On définit une application P^ζ de D dans $\mathfrak{A}^\zeta_{\Omega_\zeta}$ en posant :

$$(\alpha, \beta) \in P^\zeta(x) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega \text{ et } \alpha P(x) = \beta ;$$

$$(\alpha, \zeta) \in P^\zeta(x) \Leftrightarrow \forall\, \beta \in \Omega \quad (\alpha, \beta) \notin P(x) ;$$

$$(\zeta, \zeta) \in P^\zeta(x).$$

On vérifie sans difficulté que P^ζ est un homomorphisme. En définissant de la même façon un homomorphisme Q^ζ de D dans $(\mathfrak{A}^\zeta_{\Omega_\zeta})^*$, (P^ζ, Q^ζ) définit un homomorphisme de D dans A^ζ_Ω. Inversement tout homomorphisme de D dans A^ζ_Ω s'écrit sous la forme (P^ζ, Q^ζ). En posant : $P(x) = P^\zeta(x) \cap (\Omega \times \Omega)$ et $Q(x) = Q^\zeta(x) \cap (\Omega \times \Omega)$ on définit une représentation complète $(P, Q)_\Omega$.

Soient $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints et $\zeta \notin \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Supposons que pour tout $i \in I$, il existe un homomorphisme $\Phi^{\check{}}_{\Omega_i}$ de D dans $A^{\check{}}_{\Omega_i}$.

PROPOSITION 1.5. - *$\bigcup_{i\in I} \Phi^{\check{}}_{\Omega_i}(x)$ est un élément $\Phi^{\check{}}_{\Omega}(x)$ de $A^{\check{}}_{\Omega}$ (où $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$) et l'application $x \to \Phi^{\check{}}_{\Omega}(x)$ de D dans $A^{\check{}}_{\Omega}$ vérifie $\Phi^{\check{}}_{\Omega}(xy) \subseteq \Phi^{\check{}}_{\Omega}(x)\Phi^{\check{}}_{\Omega}(y)$.*

DÉMONSTRATION. - Pour tout $\alpha \in \Omega^{\check{}}$, il existe $i \in I$ tel que $\alpha \in \Omega^{\check{}}_i$ et il existe β, $\gamma \in \Omega^{\check{}}_i$, tels que $[\alpha, (\beta, \gamma)] \in \Phi_{\Omega_i}(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} \Phi^{\check{}}_{\Omega_i}(x)$. D'autre part, si $[\alpha, (\beta, \gamma)]$ et $[\alpha, (\beta', \gamma')] \in \bigcup_{i\in I} \Phi_{\Omega_i}(x)$, il existe $i \in I$ tel que $\Phi_{\Omega_i}(x)$ contienne ces deux quantités. Il en résulte $\beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$. Donc $\bigcup_{i\in I} \Phi^{\check{}}_{\Omega_i}(x) = \Phi^{\check{}}_{\Omega}(x) \in A^{\check{}}_{\Omega}$.

Si $(\alpha, \beta) \in \Phi^{\check{}}_{\Omega}(xy)$, il existe $i \in I$ tel que

$$(\alpha, \beta) \in \Phi^{\check{}}_{\Omega_i}(xy) = \Phi^{\check{}}_{\Omega_i}(x)\Phi^{\check{}}_{\Omega_i}(y) \subseteq \Phi^{\check{}}_{\Omega}(x)\Phi^{\check{}}_{\Omega}(y).$$

Lorsque $\Phi^{\check{}}_{\Omega}(xy) = \Phi^{\check{}}_{\Omega}(x)\Phi^{\check{}}_{\Omega}(y)$ on dit que la famille des homomorphismes $\Phi^{\check{}}_{\Omega_i}$ est sommable et a pour somme $\Phi^{\check{}}_{\Omega}$.

DÉFINITION 1.6. - *Une famille de représentations complètes $(P_i, Q_i)_{\Omega_i}$ d'un demi-groupe D par des transformations sur des ensembles Ω_i, deux à deux disjoints est dite sommable et a pour somme $(P, Q)_\Omega$, si les homomorphismes de D dans $A^{\check{}}_{\Omega_i}$ associés aux représentations $(P_i, Q_i)_{\Omega_i}$ sont sommables et ont pour somme l'homomorpisme de D dans $A^{\check{}}_{\Omega}$ associé à $(P, Q)_\Omega$.*

Soit $(P, Q)_\Omega$ une représentation complète d'un demi-groupe D; s'il existe une partition I de Ω en sous-ensembles Ω_i tels que $(P, Q)_\Omega$ soit somme de représentations complètes $(P_i, Q_i)_{\Omega_i}$, on dit que $(P, Q)_\Omega$ est décomposable en somme et on écrit $(P, Q)_\Omega = \bigcup_{i\in I} (P_i, Q_i)_{\Omega_i}$.

THÉORÈME 1.7. - *Toute représentation complète $\Phi = (P; Q)_\Omega$ d'un demi-groupe est décomposable en somme de représentations complètes cycliques.*

DÉMONSTRATION. - Soit $\rho_P = (\tau_P \cap \tau_P^{-1}) \cup \varepsilon$ et $\rho_Q = (\tau_Q \cap \tau_Q^{-1}) \cup \varepsilon$ (où ε désigne l'égalité sur Ω); ρ_P et ρ_Q sont des équivalences sur Ω; posons $\Delta_\Phi = \rho_P \vee \rho_Q$ (dans le treillis des équivalences sur Ω). Soit $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ un système de représentants de Δ_Φ. Posons $\Omega_i = \alpha_i \cup \alpha_i\tau_\Phi$, $P_i(x) = P(x) \cap [\Omega_i \times \Omega_i]$, $Q_i(x) = Q(x) \cap [\Omega_i \times \Omega_i]$. Nous montrerons que $(P, Q)_\Omega = \bigcup_{i\in I} (P_i, Q_i)_\Omega$ et que chaque $(P_i, Q_i)_{\Omega_i}$ est une représentation complète cyclique.

Supposons que $(\alpha, \beta) \in P(x)$ et $(\alpha, \gamma) \in Q(x)$. Soit α_i le représentant de la Δ_Φ-classe de α.

- si $\alpha_i = \alpha$ alors $(\alpha_i, \beta) \in \tau_P \subseteq \tau_\Phi$; donc β, et de même γ, appartient à Ω_i; il en résulte $(\alpha, \beta) \in P_i(x)$ et $(\alpha, \gamma) \in Q_i(x)$.

– si $\alpha_i \neq \alpha$, il existe $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in \Omega$, tels que $\alpha_i = \delta_1$, $\alpha = \delta_n$ et pour $p = 1, \ldots, n-1$, $(\delta_p, \delta_{p+1}) \in (\tau_P \cap \tau_P^{-1}) \cup (\tau_Q \cap \tau_Q^{-1}) \subseteq \tau_P \cup \tau_Q$. Il en résulte que $(\alpha_i, \alpha) \in \tau_\Phi$ qui est la fermeture transitive de $\tau_P \cup \tau_Q$. Comme $(\gamma, \beta) \in \tau_P$ et $(\alpha, \gamma) \in \tau_Q$ on en déduit $(\alpha_i, \beta) \in \tau_\Phi$ et $(\alpha_i, \gamma) \in \tau_\Phi$. En définitive $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_i$ et $\alpha P_i(x) = \beta$, $\alpha Q_i(x) = \gamma$.

Supposons que $(\alpha, \beta) \in P(x)$ et $(\alpha, \gamma) \notin Q(x)$ pour tout $\gamma \in \Omega$. Comme précédemment, $(\alpha, \beta) \in P_i(x)$ et $(\alpha, \gamma) \notin Q_i(x)$ pour tout $\gamma \in \Omega_i$. De même, dans le cas où $(\alpha, \beta) \notin P(x)$ pour tout $\beta \in \Omega$ et $(\alpha, \gamma) \in Q(x)$.

Inversement, si $(\alpha, \beta) \in P_i(x)$ et $(\alpha, \gamma) \in Q_i(x)$, alors $(\alpha, \beta) \in P(x)$ et $(\alpha, \gamma) \in Q(x)$; si $(\alpha, \beta) \in P_i(x)$ et $(\alpha, \gamma) \notin Q_i(x)$ pour tout $\gamma \in \Omega_i$ alors $(\alpha, \beta) \in P(x)$ et s'il existait $\gamma \in \Omega$ tel que $(\alpha, \gamma) \in Q(x)$, d'après la première partie on aurait $\gamma \in \Omega_i$, ce qui est impossible. De la définition 1.6 résulte alors que $(P, Q)_\Omega = \bigcup_{i \in I} (P_i, Q_i)_{\Omega_i}$.

Chaque représentation $\Phi_i = (P_i, Q_i)_{\Omega_i}$ est cyclique; en effet, $\tau_{P_i} = \bigcup_{x \in D} P_i(x) = (\bigcup_{x \in D} P(x)) \cap [\Omega_i \times \Omega_i]$, c'est-à-dire $\tau_{P_i} = \tau_P \cap (\Omega_i \times \Omega_i)$; de même $\tau_{Q_i} = \tau_Q \cap (\Omega_i \times \Omega_i)$. On en déduit $\tau_{\Phi_i} = \tau_\Phi \cap (\Omega_i \times \Omega_i)$ et pour $\alpha_i \in \Omega_i$

$$\Omega_i = \alpha_i \cup \alpha_i \tau_\Phi = \alpha_i \cup \alpha_i \tau_{\Phi_i}$$

ce qui prouve que Φ_i est cyclique.

L'expression de l'équivalence Δ_Φ introduite dans la démonstration du théorème 1.7 se simplifie avec la notion suivante:

DÉFINITION 1.8. – *Une représentation complète $\Phi = (P, Q)_\Omega$ d'un demi-groupe D est dite représentation commutante si pour tout $x, y \in D$, $P(x)Q(y) = Q(y)P(x)$.*

On a alors:

PROPOSITION 1.9. – *Si Φ est une représentation complète décomposable en somme de représentations complètes Φ_i, $\Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ est commutante si et seulement si chaque Φ_i est commutante.*

Cela résulte immédiatement des définitions 1.6 et 1.8. Le théorème 1.7 donne alors:

COROLLAIRE 1.10. – *Toute représentation commutante est somme de représentations commutantes cycliques.*

Il est possible de définir toute représentation commutante cyclique par certaines équivalences sur $D^1 \times (D^1)^*$ ($D^1 = D$ si D a un élément unité et $D^1 = D \cup \{1\}$ si D n'en a pas, la multiplication sur D^1 étant définie de façon à faire agir 1 comme élément unité de D^1).

Soit ρ une équivalence régulière à *droite* sur $D^1 \times (D^1)^*$ dont l'une des classes est un idéal à droite H (6) de $D^1 \times (D^1)^*$ tel que $(1, 1) \notin H$. Notons $H_\alpha (\alpha \in \Omega)$ l'ensemble des ρ–classes distinctes de H. A tout $x \in D$, on associe les transformations $P_\rho(x)$, $Q_\rho(x)$ sur Ω définies par :

$$(\alpha, \beta) \in P_\rho(x) \Leftrightarrow H_\alpha(x, 1) \subseteq H_\beta \text{ et } (\alpha, \beta) \in Q_\rho(x) \Leftrightarrow H_\alpha(1, x) \subseteq H_\beta .$$

L'application $x \to [P_\rho(x), Q_\rho(x)]$ définit une représentation complète de D par des transformations sur Ω.

Cette représentation est commutante ; en effet :

$$(\alpha, \beta) \in P_\rho(x) \text{ et } (\beta, \gamma) \in Q_\rho(y) \Leftrightarrow \begin{cases} H_\alpha(x, 1) \subseteq H_\beta \\ H_\beta(1, y) \subseteq H_\gamma \end{cases} \Leftrightarrow H_\alpha(x, 1)(1, y) \subseteq H_\gamma$$

$$\Leftrightarrow H_\alpha(x, y) \subseteq H_\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} H_\alpha(1, y) \subseteq H_\delta \\ H_\delta(x, 1) \subseteq H_\gamma \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha, \delta) \in Q_\rho(y) \text{ et } (\delta, \gamma) \in P_\rho(x).$$

Soit H_{α_0} la ρ–classe de $(1, 1)$. Pour toute ρ–classe H_γ contenant un couple $(x, y) \in D^1 \times (D^1)^*$, on a : $H_{\alpha_0}(x, y) \subseteq H_\gamma$; donc $(\alpha_0, \gamma) \in P(x) Q(y)$. Il en résulte que pour tout $\gamma \in \Omega$, $\gamma \neq \alpha_0$, $\gamma \in \alpha_0 \tau_{(P,Q)}$. Donc $\Omega = \alpha_0 \cup \alpha_0 \tau_{(P,Q)}$ et la représentation définie est cyclique :

PROPOSITION 1:11. – *Toute représentation commutante, cyclique est équivalente à une représentation définie pas une équivalence régulière à droite sur* $D^1 \times (D^1)^*$ *ayant pour l'une de ses classes un idéal à droite, éventuellement vide, ne contenant pas* $(1, 1)$.

DÉMONSTRATION. – Soit $\Phi = (P, Q)_\Omega$ une représentation commutante, cyclique de D. On étend la représentation Φ en une représentation $\Phi^1 = (P^1, Q^1)_\Omega$ de D^1 en posant $\Phi^1 = \Phi$ si D a un élément unité, et si D n'a pas d'élément unité on pose $P^1(x) = P(x)$, $Q^1(x) = Q(x)$, $P^1(1) = Q^1(1) = \{(\alpha, \alpha) ; \alpha \in \Omega\}$. La représentation Φ étant cyclique $\Omega = \alpha_0 \cup \alpha_0 \tau_\Phi$ pour un élément $\alpha_0 \in \Omega$. Comme τ_P et τ_Q commutent $\tau_\Phi = \tau_P \cup \tau_Q \cup \tau_P \cdot \tau_Q$ et $\alpha_0 \tau_\Phi = \{\beta ; \beta \in \Omega$ tels qu'il existe $u, v \in D^1$ avec $(\alpha, \beta) \in P^1(u) Q^1(v)\}$. Sur $D^1 \times (D^1)^*$ posons :

$$[(u, v), (u', v')] \in \rho_{\alpha_0} \text{ si et seulement si } \alpha_0 P^1(u) Q^1(v) = \alpha_0 P^1(u') Q^1(v').$$

On vérifie que ρ_{α_0} est une équivalence régulière à droite ; la ρ_{α_0}-classe des couples (u, v) tels que $(\alpha_0, \beta) \notin P^1(u) Q^1(v)$ pour tout $\beta \in \Omega$ est un idéal à droite H de $D^1 \times (D^1)^*$, ou est vide. $(1, 1) \notin H$ car $\alpha_0 P^1(1) Q^1(1) = \alpha_0$.

(6) Nous supposons que H peut être vide : on peut éventuellement ne pas distinguer de ρ-classe idéal à droite.

Il existe une bijection φ de Ω sur l'ensemble des ρ_{α_0}-classes distinctes de H: à tout $\beta \in \Omega = \alpha_0 \cup \alpha_0 \tau_\Phi$, φ associe la classe formée des couples $(u, v) \in D^1 \times (D^1)^*$ tels que $(\alpha_0, \beta) \in P^1(u)\, Q^1(v)$. Soit $(\alpha, \beta) \in P(x)$ et u', v' tels que $(\alpha_0, \alpha) \in P^1(u')\, Q^1(v')$.

On a: $(\alpha_0, \beta) \in P^1(u')Q^1\, v')P(x) = P^1(u'x)Q^1(v')$; donc $H_\rho(x.\, 1) \subseteq H_\varrho$ ce qui entraîne $(\alpha\varphi, \beta\varphi) \in P_\rho(x_\rho)$. On démontre aussi: $(\alpha\varphi, \beta\varphi) \in P_\rho(x) \Rightarrow (\alpha, \beta) \in P(x)$. P et P_ρ sont donc des représentations équivalentes. Le même résultat vaut pour Q et Q_ρ. $(P, Q)_\Omega$ et $(P_\rho, Q_\rho)_{\Omega\varphi}$ sont donc équivalentes.

COROLLAIRE 1.12. [27] – *a) Toute représentation P_Ω d'un demi–groupe D est somme de représentations cycliques.*

b) Toute représentation cyclique de D est équivalente à une représentation définie par une équivalence régulière à droite ρ sur D^1 ayant un idéal à droite R ne contenant pas 1, *pour l'une de ses classes.*

Il suffit pour obtenir ce corollaire, d'associer à la représentation P_Ω, la représentation complète commutante $(P, Q_1)_\Omega$ où Q_1 est l'anti–représentation unité $(\alpha Q_1(x) = \alpha, \ \forall\, \alpha \in \Omega)$.

Les représentations complètes, bitransitives sont des cas particuliers de représentations cycliques: si Φ est bitransitive on a en effet $\Omega = \alpha\tau_\Phi$ pour tout $\alpha \in \Omega$. La proposition 1.11 devient:

PROPOSITION 1.13. – *Un demi–groupe D a une représentation commutante, bitransitive, si et seulement si il existe une équivalence régulière à droite ρ sur $D^1 \times (D^1)^*$, telle que:*

a) l'une des ρ–classes soit un idéal à droite H (éventuellement vide) ne contenant pas (1,1).

b) H est résidu à droite des autres ρ–classes (si $H = \emptyset$ toutes les classes sont nettes à droite).

c) Si ρ n'a qu'une classe K autre que H, il existe $(u, v) \in D^1 \times (D^1)^*$ avec u ou $v \neq 1$, tel que $K(u, v) \subseteq K$.

De plus, toute représentation commutante, bitransitive est équivalente à la représentation définie par une telle équivalence ρ sur $D_1 \times (D^1)^*$.

DÉMONSTRATION. – Si D a une représentation commutante, bitransitive $\Phi = (P, Q)_\Omega$, Φ est équivalente à la représentation $P_{\rho_{\alpha_0}}$ définie ci–dessus (Prop. 1.11). Les propriétés *b*) et *c*) résultent immédiatement de la bitransitivité. Réciproquement (7) soit ρ une équivalence régulière à droite sur $D^1 \times D^{1*}$ vérifiant *a*), *b*), *c*). Soient $\alpha, \beta \in \Omega$; d'après *b*), il existe $(r, s) \in D^1 \times D^{1*}$ tels que

(7) Nous supposons que D est sans élément unité. Dans le cas contraire, la démonstration est plus simple.

$H_\alpha(r, s) \subseteq H_\beta$. Si $r \neq 1$ et $s \neq 1$ $\alpha P_\rho(r) Q_\rho(s) = \beta$. Si $r \neq 1$ et $s = 1$ (ou bien $r = 1$, $s \neq 1$), $\alpha P_\rho(r)$ ou bien $\alpha Q_\rho(s) = \beta$. Si $r = s = 1$, $\alpha = \beta$; nous distinguons 2 cas:

– Pour card $\Omega \geq 2$, il existe $\gamma \neq \alpha$ et d'après ce qui précède, il existe (u, v) et $(u', v') \in D^1 \times D^{1*}$ tels que u ou $v \neq 1$, u' ou $v' \neq 1$, avec $\alpha P(u) Q(v) = \gamma$ et $\gamma P(u') Q(v') = \alpha$. Il en résulte:

$\alpha P(uu') Q(vv') = \alpha$ avec uu' ou $vv' \neq 1$, ce qui achève de démontrer la bitransitivité.

– Pour card $\Omega = 1$, la bitransitivité résulte de c).

COROLLAIRE 1.14. [27] – *Toute représentation transitive P_Ω (card $\Omega \geq 2$) d'un demi–groupe D est équivalente à une représentation définie par une équivalence régulière à droite sur D^1, dont l'une des classes H est un idéal à droite ne contenant pas* 1, *résidu à droite de toutes les autres classes (si $H = \emptyset$, toutes les classes sont nettes à droite).*

Les représentations transitives P_Ω se généralisent naturellement en les représentations symétriques [28]. Compte tenu aussi du fait que la décomposition d'une représentation complète $(P, Q)_\Omega$ en somme du théorème 1.17, intervient à partir de l'équivalence $\Delta_{(P,Q)} = \rho_P \vee \rho_Q$ avec $\rho_P = (\tau_P \cap \tau_P^{-1}) \cup \varepsilon$ et de même pour ρ_Q, cela justifie l'introduction de la définition suivante:

DÉFINITION 1.15. – *Une représentation complète est dite symétrique si et seulement si* $\tau_P = \tau_P^{-1}$ et $\tau_Q = \tau_Q^{-1}$.

PROPOSITION 1.16. – *Toute représentation commutante, symétrique est décomposable en somme d'une représentation nulle et de représentations commutantes, symétriques, bitransitives. Si l'on identifie à une même représentation toutes les représentations nulles, la décomposition est unique.*

DÉMONSTRATION. – D'après le théorème 1.17, $\Phi = (P, Q)_\Omega = \bigcup_{i \in I} (P_i, Q_i)_{\Omega_i} = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ avec $\Omega_i = \alpha_i \cup \alpha_i \tau_{\Phi_i}$. Supposons que τ_{Φ_i} ne soit pas une représentation nulle. $\tau_{\Phi_i} = \Omega_i \times \Omega_i$; en effet, soient $\beta_1, \beta_2 \in \Omega_i$; il existe $u_1, v_1 \in D^1$, $u_2, v_2 \in D^1$ tels que $\alpha P_i(u_1) Q_i(v_1) = \beta_1$ et $\alpha P_i(u_2) Q_i(v_2) = \beta_2$.

– Si $u_1 = v_1 = 1$ par exemple, $\beta_1 = \alpha$. Comme Φ_i est non nulle, il existe $x \in D$ et $\beta \in \Omega_i$ tels que $(\alpha, \beta) \in P_i(x)$; τ_{P_i} étant symétrique, il existe $x' \in D$ tel que $(\beta, \alpha) \in P_i(x')$. Donc $\alpha P_i(xx') = \beta$ avec $xx' = 1$. Donc si β_1 (ou β_2) $= \alpha$, $(\beta_1, \beta_2) \in \tau_{\Phi_i}$.

– Si u_1 ou $v_1 \neq 1$ et u_2 ou $v_2 \neq 1$, il existe u'_1 et $v'_1 \in D^1$ ($u'_1 = 1$ si $u_1 = 1$, $v'_1 = 1$ si $v_1 = 1$) tels que $(\beta_1, \alpha) \in Q_i(v'_1) P_i(u'_1)$. D'où

$$(\beta_1, \beta_2) \in Q_i(v'_1) P_i(u'_1) P_i(u_1) Q_i(v_1) = P_i(u'_1 u_1) Q_i(v_1 v'_1).$$

Il en résulte, compte tenu des possibilités d'égalité à 1 des arguments de P_i et Q_i, que $(\beta_1, \beta_2) \in \tau_{\Phi_i}$.

Pour montrer l'unicité de la décomposition, soit $\Phi = (P, Q)_\Omega$ une représentation commutante, symétrique et $\Phi = (P_0, Q_0)_{\Omega_0} \cup [\bigcup_{i \in I} (P_i, Q_i)_{\Omega_i}]$ une décomposition de Φ en représentation nulle $(P_0, Q_0)_{\Omega_0}$ et représentations commutantes, symétriques, bitransitives. Pour tout $\alpha \in \Omega_i$ $(i \neq 0)$ on a $\Omega_i = \alpha\Delta(P, Q)$: en effet, si $\beta \in \alpha\Delta(P, Q)$ on a $\alpha P(x) Q(y) = \beta$; d'après la définition de la somme $\alpha P(x) \in \Omega_i$ et aussi $\alpha P(x) Q(y) = \beta$; inversement, si $\beta \in \Omega_i$, $(P_i, Q_i)_{\Omega_i}$ étant bitransitive, il existe $x, y \in D$ tels que $\alpha P_i(x) Q_i(y) = \beta$ d'où $\alpha P(x) Q(y) = \beta$ et $\beta \in \alpha\Delta(P, Q)$. Il en résulte que la décomposition envisagée coïncide avec celle du théorème 1.17, d'où l'unicité,

On peut envisager d'établir un résultat analogue à la proposition 1.13, en caractérisant les représentations commutantes, symétriques, bitransitives, par certaines équivalences régulières à droite sur $D^1 \times (D^1)^*$. En fait, nous verrons au paragraphe suivant que ces représentations sont liées aux représentations et anti–représentations transitives.

3. – Représentations commutantes, symétriques, bitransitives.

Soit D admettant une représentation $\Phi = (P, Q)_\Omega$ commutante, symétrique, bitransitive. On a $\rho_P = \tau_P \cup \varepsilon (= \tau_P^{-1} \cup \varepsilon)$, $\rho_Q = \tau_Q \cup \varepsilon (= \tau_Q^{-1} \cup \varepsilon)$; posons $\mathcal{H}_\Phi = \rho_P \cap \rho_Q$. Nous convenons, si D est sans élément unité, de noter $P(1)$ et $Q(1)$ l'application identité sur Ω (c'est–à–dire de considérer implicitement la représentation étendue). Pour une telle représentation Φ les résultats classiques suivants de la théorie des demi–groupes sont valables:

LEMME 1.17 (GREEN, [2], p. 49). – *Soient* $\alpha, \beta \in \Omega$ *tels que* $(\alpha, \beta) \in \tau_P^1$. *Il existe* $s, s' \in D^1$ *tels que* $\alpha P(s) = \beta$ *et* $\beta P(s') = \alpha$. *Les applications* $\sigma : \zeta \to \zeta P(s)$ *et* $\sigma' : \eta \to \eta P(s')$ *sont des bijections réciproques entre* $\alpha\rho_Q$ *et* $\beta\rho_Q$ *conservant les* ρ_P*–classes.*

THÉORÈME 1.18 (SCHÜTZENBERGER, [2], § 2.4 et [30]). – *Soit* H *une* $\mathcal{H}_\Phi$*–classe de* D.

1) $\Gamma_\Phi(H) = \{\gamma_x;\ \gamma_x \in \mathfrak{S}_H : \forall\, \alpha \in H,\ \alpha\gamma_x = \alpha P(x) = \beta \in H\}$ *est un groupe simplement transitif* (8) *de permutations de* H.

2) $\Gamma'_\Phi(H) = \{\gamma'_x;\ \gamma'_x \in \mathfrak{S}_H : \forall\, \alpha \in H,\ \alpha\gamma'_x = \alpha Q(x) = \beta \in H\}$ *est un groupe anti–isomorphe à* $\Gamma_\Phi(H)$.

3) *Pour deux* $\mathcal{H}_\Phi$*–classes* H_1, H_2, $\Gamma(H_1)$ *et* $\Gamma(H_2)$ *sont isomorphes.*

---

(8) Pour tout $\alpha, \beta \in H$, il existe *une seule* application $\gamma_x \in \Gamma_\Phi(H)$ telle que $\alpha\gamma_x = \beta$.

A une représentation Φ commutante, symétrique, bitransitive de D on peut associer une représentation de D par des matrices monomiales sur le groupe avec zéro $\Gamma_\Phi(H) \cup (0)$, de la façon suivante: on indexe les ρ_P–classes par un ensemble I, les ρ_Q–classes par un ensemble Λ; on distingue un élément dans I et un élément dans Λ et on note de la même façon l'élément distingué dans chaque ensemble. A chaque $\lambda \in \Lambda$, on associe $\alpha_\lambda \in H_{1\lambda}$ et on choisit q_λ, $q'_\lambda \in D$ tels que $\alpha_\lambda = \alpha_1 P(q_\lambda)$ et $\alpha_1 = \alpha_\lambda P(q'_\lambda)$. On associe à tout élément $x \in D$ une matrice de format $\Lambda \times \Lambda$, $M_\Phi(x) = [m_{\lambda\mu}(x)]$ sur $\Gamma_\Phi(H) \cup (0)$ $(H = H_{11})$ telle que $m_{\lambda\mu}(x) = \begin{cases} \gamma_{q_\lambda x q'_\mu} & \text{si} \quad H_{1\lambda} P(x) = H_{1\mu}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

On définit de façon duale une matrice $M'_\Phi(x) = [m'_{ij}(x)]$ de format $I \times I$ sur $\Gamma'_\Phi(H) \cup (0)$ où les colonnes sont monomiales.

THÉORÈME 1.19 (SCHÜTZENBERGER [3])). – *Pour toute représentation commutante, symétrique, bitransitive* Φ, *d'un demi–groupe* D, M_Φ [*resp.* M'_Φ] *définit une représentation* [*resp. anti–représentation*] *de* D *par des matrices à lignes* [*resp. colonnes*] *monomiales. De plus pour tout* λ, $\mu \in \Lambda$ [*resp.* i, $j \in I$] *et pour tout* $\gamma \in \Gamma_\Phi(H)$ [*resp.* $\gamma' \in \Gamma'_\Phi(H)$] *il existe* $x \in D$ *tel que* $m_{\lambda\mu}(x) = \gamma$ [*resp.* $m'_{ij}(x) = \gamma'$].

(Pour exprimer cette dernière propriété on peut dire que chaque ligne des matrices $M_\Phi(x)$ peut être remplie arbitrairement).

Nous complétons les résultats précédents par un théorème (1.22) indiquant comment P, Q et (P, Q) sont liées lorsque (P, Q) est une représentation commutante, symétrique, bitransitive. Le lemme 1.21 constitue une réciproque affaiblie du théorème 1.19.

LEMME 1.20. – *Si* D *admet une représentation* $\Phi = (P, Q)$ *commutante, symétrique, bitransitive,* P[*resp.* Q] *est nulle ou somme de représentations* [*resp. d'anti–représentations*] *transitives, équivalentes entre elles.* (P et Q ne peuvent être nulles en même temps).

DÉMONSTRATION. – Si P n'est pas nulle, soit Ω_i $(i \in I)$ l'ensemble des ρ_P–classes. $P_i(x) = P(x) \cap (\Omega_i \times \Omega_i)$ définit une représentation non nulle: en effet, il existe $\alpha_0 \in \Omega$ et $z \in D$ tels que $\alpha_0 P(z) = \beta$; comme Φ est bitransitive, pour tout $\alpha_i \in \Omega_i$ il existe u, $v \in D^1$ (u ou $v \neq 1$) tels que $\alpha_i P(u) Q(v) = \alpha_0$. Donc $\alpha_i P(u) Q(v) P(z) = \beta = \alpha_i P(uz) Q(v)$ et $\alpha_i P(uz) = \gamma \in \Omega_i$. P_i est une représentation transitive et $P(x) = \bigcup_{i \in I} P_i(x)$. D'après le lemme 1.17, P_i et P_j sont des représentations équivalentes: en effet, $P_i(x) \cdot \varphi = \varphi\theta[P_i(x)]$ où φ est la bijection définie par $\xi \to \xi Q(s)$, s étant tel que $\alpha Q(s) = \beta$ pour un $\alpha \in \Omega_i$ et $\beta \in \Omega_i$ pris dans la même ρ_Q–classe; on prend θ tel que $\theta[P_i(x)] = P_j(x)$.

Avant d'aborder la réciproque nous précisons la notion de groupe simplement transitif défini par une représentation transitive. Soit D un demi–groupe

admettant une représentation transitive P par des transformations sur un ensemble Ω. Sur certains complexes K de Ω, les transformations $P(x)$ induisent un groupe simplement transitif de permutations. On montre sans difficulté, qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie K de Ω soit le support d'un tel groupe est que :

$a)$ $KP(x) \cap K \neq \emptyset \Rightarrow KP(x) = K$;

$b)$ $\alpha_0 P(x) = \alpha_0 P(y) = \beta_0$, α_0 et $\beta_0 \in K \Rightarrow \forall\, \alpha \in K,\ \alpha P(x) = \alpha P(y) \in K$.

Parmi ces groupes simplement transitifs induits par P, ceux dont le support vérifie la condition

$b')$ $\alpha_0 P(x) = \alpha_0 P(y) = \gamma,\ \alpha_0 \in K \Rightarrow \forall\, \alpha \in K,\ \alpha P(x) = \alpha P(y)$.

[en présence de a), b') est plus restrictive que b)] *sont appelés groupes simplement transitifs* ***associés*** (9) *à P et notés* $\Gamma_P(K)$. On définit de même des groupes simplement transitifs *associés* $\Gamma_Q(K')$ à une anti-représentation Q. Soit G un groupe tel qu'il existe des homomorphismes injectifs de G dans des groupes $\Gamma_P(K)$ et $\Gamma_Q(K')$. G peut être considéré comme groupe simplement transitif sur un ensemble H (support de G) en bijection avec une partie de K et une partie de K'. Nous disons alors que G est un groupe simplement transitif ***commun*** à P et Q. Avec la terminologie qui vient d'être définie :

LEMME 1.21. – *Soit D un demi-groupe admettant une représentation transitive* P_1 *par des transformations sur* Ω_1 *et une anti-représentation transitive* Q_1 *par des transformations sur* Ω'_1. *Soit G un groupe simplement transitif commun à* P_1 *et* Q_1. *Alors D admet une représentation complète* $\Phi = (P, Q)_\Omega$ *commutante, symétrique, bitransitive, telle que* :

a) P_Ω [*resp.* Q_Ω] *soit somme de représentations* [*resp. anti-représentations*] *équivalentes à* P_1 [*resp.* Q_1] ;

b) le support de G soit en bijection avec les $\mathfrak{K}_\Phi$*-classes.*

DÉMONSTRATION. – 1) Soit H le support de G. G et son dual G^* (anti-isomorphe à G) agissent de façon simplement transitive sur H. Montrons que si deux groupes Γ et Γ' simplement transitifs sur H sont anti-isomorphes par $\Psi(\Gamma \xrightarrow{\Psi} \Gamma')$ alors ils commutent au sens large (10), c'est-à-dire qu'il existe une bijection φ de H sur H telle que, pour tout $x \in \Gamma$, pour tout $y' \in \Gamma'$ et

(9) Les supports des groupes simplement transitifs *associés* à une représentation transitive, ordonnés par inclusion forment une famille inductive. Il y a donc des supports maximaux. J'ignore si ces supports maximaux sont en bijection ou non. Dans l'affirmative cela permettrait d'introduire une notion de groupe maximal associé à une représentation transitive.

(10) C'est réciproque du lemme 2.23 de [2] (p. 64).

pour tout $\alpha \in H$:

$$\alpha x \varphi y' \varphi^{-1} = \alpha \varphi y' \varphi^{-1} x.$$

Soient α_0 et α'_0 deux éléments fixés de H ; posons $\alpha_0 \varphi = \alpha'_0$. A tout $\beta \in H$, on fait correspondre $\beta' \in H$, $\beta' = \beta\varphi$ tel que si $\alpha_0 x = \beta$, alors $\alpha'_0 \Psi(x) = \beta'$. Par suite de la simple transitivité de Γ et Γ', φ définit une bijection de H. S'il existe $\beta \in H$ tel que $\alpha x = \beta$ et $\beta\varphi\Psi(y) = \gamma\varphi$, en prenant z tel que $\alpha_0 z = \alpha$ on a $\alpha_0 zx = \beta$, d'où $\alpha_0 \varphi \Psi(zx) = \beta\varphi$ (définition de $\dot{\varphi}$). Donc $\alpha_0 \varphi \Psi(zx)\Psi(y) = \gamma\varphi$, ce qui implique $\alpha_0 yzx = \gamma$. Posons $\alpha_0 yz = \delta$; on a $\delta x = \gamma$ et

$$\alpha_0 \varphi \Psi(yz) = \alpha_0 \varphi \Psi(z)\Psi(y) = \alpha\varphi\Psi(y) = \delta\varphi.$$

On démontre de la même façon l'implication

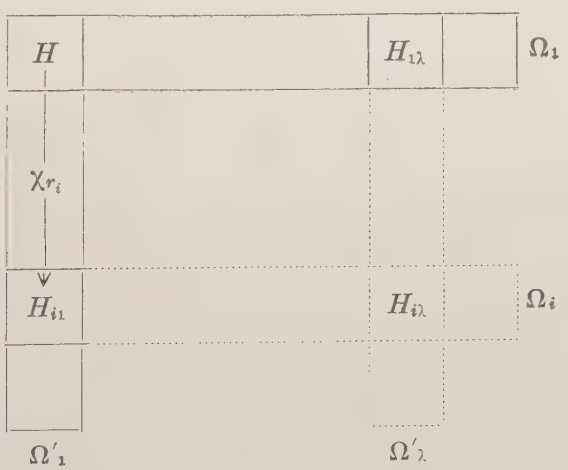
$$(\exists \beta_1 \in H : \alpha\varphi\Psi(y) = \beta_1\varphi \text{ et } \beta_1 x = \gamma) \Rightarrow (\exists \delta_1 \in H : \alpha x = \delta_1 \text{ et } \delta_1 \varphi \Psi(y) = \gamma\varphi),$$

ce qui achève de prouver que Γ et Γ' commutent au sens large.

2) Ce qui précède montre que nous pouvons supposer que $\Omega_1 \cap \Omega'_1 = H$ et que P_1 et Q_1 commutent sur H

$$(\text{soit } [P_1(x) \cap (H \times H)].[Q_1(y) \cap (H \times H)] = [Q_1(y) \cap (H \times H)].[P_1(x) \cap (H \times H)]).$$

Nous montrerons que les ensembles $HP_1(x)$ $(x \in D)$ distincts forment une partition de Ω_1 en ensembles $H_{1\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda, H_{11} = H)$ en bijection avec H et de même, que les ensembles $HQ_1(x)$ forment une partition de Ω'_1 en ensembles H_{i1} $(i \in I)$ en bijection avec H (cf. figure ci-dessous).



Soit $\gamma \in \Omega'_1$ tel que $\alpha Q_1(y) = \gamma$, pour un élément $\alpha \in H$ tel que $\alpha P_1(x) \in H$. Posons:

$$\gamma \bar{P}(x) = \alpha P_1(x) Q_1(y).$$

Il est à noter que $\gamma P(x)$ est un élément bien défini de Ω'_1, car il existe $y' \in D$ tel que $\alpha Q_1(y'y) = \alpha$ et $\alpha P_1(x) Q_1(y'y) = \alpha P_1(x) \in H$, ce qui prouve que $\alpha P_1(x) Q_1(y)$ est bien défini. La définition de $\gamma P(x)$ ne dépend pas du choix de $\alpha \in H$ et de $y \in D$ tel que $\alpha Q_1(y) = \gamma$; en effet, si $\alpha_1 Q_1(y_1) = \gamma$ avec $\alpha_1 P_1(x) \in H$, en posant $\alpha_1 = \alpha Q_1(u)$, on obtient:

$$\alpha_1 P_1(x) Q_1(y_1) = \alpha Q_1(u) P_1(x) Q_1(y_1) = \alpha P_1(x) Q_1(u) Q_1(y_1).$$

Or $\alpha Q_1(u) Q_1(y_1) = \alpha Q_1(y) = \gamma$ implique (d'après la définition des groupes simplement transitifs associés à Q): $\alpha P_1(x) Q_1(u) Q_1(y_1) = \alpha P_1(x) Q_1(y)$. Donc

$$\alpha_1 P_1(x) Q_1(y_1) = \alpha P_1(x) Q_1(y).$$

Si $H Q_1(x) \cap H Q_1(y) \neq \emptyset$, il existe $\alpha, \beta \in H$ et $\gamma \in \Omega'_1$ tels que $\alpha Q_1(x) = \beta Q_1(y) = \gamma$. Pour tout $\alpha' \in H$,

$$\alpha' Q_1(x) = \alpha P_1(v) Q_1(x) = \gamma \bar{P}(v) = \beta Q_1(y) \bar{P}(v) = \beta P_1(v) Q_1(y) \in H Q_1(y).$$

On en déduit $H Q_1(x) \subseteq H Q_1(y)$ et aussi l'inclusion contraire de la même façon: les $H Q_1(x)$ distincts forment une partition de Ω_1 en sous ensembles $H_{1\lambda}$ disjoints. De même les $H P_1(x)$ fournissent les H_{i1}. Les ensembles $H = H_{11}$ et H_{i1} sont en bijection; en effet, pour $\alpha_1 \in H$ et $\beta_{i1} \in H_{i1}$ il existe r_i et $r'_i \in D$ tels que $\alpha_1 Q_1(r_i) = \beta_{i1}$ et $\beta_{i1} Q_1(r'_i) = \alpha_1$. H étant support d'un groupe simplement transitif associé à Q_1, pour tout $\alpha \in H$, $\alpha Q_1(r_i) Q_1(r'_1) = \alpha$ et $\alpha \to \alpha Q_1(r_i)$ définit une bijection de H sur H_{i1}. Nous notons cette bijection χ_{r_i}.

3) On plonge H_{i1} dans un ensemble Ω_i en bijection avec Ω_1 et on suppose que cette bijection notée $\bar{\chi}_{r_i}$ prolonge χ_{r_i}. Posons $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ et notons $H_{1\lambda} \bar{\chi}_{r_i} = H_{i\lambda}$, $\bigcup_{i \in I} H_{i\lambda} = \Omega'_\lambda$. A tout $x \in D$ on associe $P(x)$ défini par:

$$(\alpha, \beta) \in P(x) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in \Omega_i \times \Omega_i \text{ et } (\alpha \bar{\chi}_{r_i}^{-1}, \beta \bar{\chi}_{ri}^{-1}) \in P_1(x) = P_{\Omega_1}(x).$$

On vérifie sans difficulté que $P(x)$ est une transformation partielle de Ω et que P définit une représentation. De plus $P(x) = \bigcup_{i \in I} P_{\Omega_i}(x)$ avec

$(\alpha, \beta) \in P_{\Omega_i}(x) \Leftrightarrow (\alpha\bar{\chi}_{r_i}^{-1}, \beta\bar{\chi}_{r_i}) \in P_{\Omega_1}(x)$, et les P_{Ω_i} sont des représentations équivalentes à P_{Ω_1} (on a en effet: $\bar{\chi}_{r_j}^{-1} P_{\Omega_i}(x) = P_{\Omega_j}(x)\bar{\chi}_{r_j}^{-1}$ pour tout $x \in D$).

Vérifions que $P(x)$ est défini de façon à coïncider avec $\bar{P}(x)$ défini dans la partie 2; si $(\gamma, \delta) \in P(x)$ avec $\gamma, \delta \in H_{i1}$, d'après la définition de $\bar{P}(x)$ on a: $\gamma Q_1(r'_i)P_1(x) = \gamma\bar{P}(x) \cdot Q_1(r'_i) = \delta Q_1(r'_i)$, c'est-à-dire $(\gamma\bar{\chi}_{r_j}^{-1}, \delta\bar{\chi}_{r_j}^{-1}) \in P_{\Omega_i}(x)$ d'où $(\gamma, \delta) \in P(x)$. Inversement, si $\gamma, \delta \in H_{i1}$ et si $\gamma P(x) = \delta$, il existe γ_1 et $\delta_1 \in H$ tels que $\gamma = \gamma_1 Q_1(r_i)$, $\delta = \delta_1 Q_1(r_i)$ et $\gamma_1 P_1(x) = \delta_1$; il en résulte $\gamma\bar{P}(x) = \gamma_1 P_1(x)Q_1(r_i) = \delta$.

(*C*) Montrons que $\gamma P(x)Q_1(z) = \gamma Q_1(z)P(x)$ pour tout $\gamma \in \Omega'_1$, et pour tout x, $z \in D$. Si $\gamma P(x) = \delta$ et $\delta Q_1(z) = \beta$ avec $\gamma, \delta, \beta \in \Omega'_1$, en utilisant le fait que $P(x)$ et $\bar{P}(x)$ coïncident, il existe $\alpha \in H$ tel que $\alpha Q_1(y) = \gamma$ avec $\alpha P_1(x) \in H$; on a alors $\gamma P(x) = \delta = \alpha P_1(x)Q_1(y)$. Soit $\delta_1 = \gamma Q_1(z)$ ($\gamma Q_1(z)$ est défini car γ et δ sont dans le même ensemble $HQ(r_i)$ et $\delta Q_1(z)$ est défini). Par définition de P $\alpha Q_1(y)Q_1(z) = \delta_1$ implique $\delta_1 P(x) = \alpha P_1(x)Q_1(y)Q_1(z) = \delta Q_1(z) = \beta$. On démontre de même que si $\gamma, \beta \in \Omega'_1$, $(\gamma, \beta) \in Q_1(z)P(x)$ implique $(\gamma, \beta) \in P(x)Q_1(z)$.

4) Définissons maintenant l'anti-représentation Q. On pose:

$(\gamma, \delta) \in Q(y) \Leftrightarrow \gamma \in H_{i\lambda}$, $\delta \in H_{j\lambda}$ et il existe $x \in D$ tel que $\gamma_1 P(x) = \gamma$, $\delta_1 P(x) = \delta$ pour certains γ_1, $\delta_1 \in \Omega'_1$ tels que $\gamma_1 Q_1(y) = \delta_1$.

(En bref, $\gamma Q(y) = \delta$, si et seulement si, il existe $x \in D$ tel que $P(x)$ applique Ω'_1 sur Ω'_λ et $(\gamma, \delta) \in P^{-1}(x)Q(y)P(x)$). Pour tout $y \in D$, $Q(y)$ définit une transformation partielle sur Ω; en effet, si $(\gamma, \delta) \in Q(y)$ et $(\gamma, \delta') \in Q(y)$ alors $(\gamma, \delta) \in P^{-1}(x)Q_1(y)P(x)$ et de même $(\gamma, \delta') \in P^{-1}(x')Q_1(y)P(x')$. Il existe α et $\alpha' \in \Omega'_1$ tels que $\alpha P(x) = \gamma$, $\alpha' P(x') = \gamma$ et $\alpha Q_1(y)P(x) = \delta$, $\alpha' Q_1(y)P(x') = \delta$. Comme α et α' sont dans H_{i1} (pour un certain $i \in I$), il existe $v \in D$ tel que $\alpha' = \alpha P(v)$. D'après la définition de P, on a: $\alpha Q_1(r'_i)P_1(x) = \alpha P(x)Q_1(r'_i) = \gamma Q(r'_1) = \alpha P(v)Q_1(r'_i)P_1(x')$.

D'après (*C*): $\alpha Q_1(r'_i)P_1(x) = \alpha Q_1(r'_i)P(v)P_1(x') = \alpha Q_1(r'_i)P_1(vx')$.

Comme $\alpha Q_1(r'_i) \in H$, on a: $\alpha Q_1(y)Q_1(r'_j)P_1(x) = \alpha Q_1(y)Q_1(r'_j)P_1(vx')$, en supposant que $\alpha Q_1(y) \in H_{j1}$. En utilisant à nouveau (*C*), on obtient:

$$\alpha Q_1(y)Q_1(r'_j)P_1(x) = \alpha P(v)Q_1(r'_j)P_1(x'), \text{ c'est-à-dire}$$

$\alpha Q_1(y)P(x) = \alpha' Q_1(y)P(x')$ ou bien $\delta = \delta'$. Ce qui précède montre aussi que la définition de Q par $(\gamma, \delta) \in Q(y) \Leftrightarrow (\gamma, \delta) \in (\Omega'_\lambda \times \Omega'_\lambda) \cap P^{-1}(x)Q_1(y)P(x)$, ne dépend pas du choix de l'application $P(x)$ de Ω'_1 sur Ω'_λ qui sert à la définir, ce qui permet aussi de vérifier immédiatement que Q est une anti-représentation, somme d'anti-représentations équivalentes à Q_1, que Q est symétrique et qu'elle commute avec P. De plus il est évident que $(P, Q)_\Omega$ ainsi définie est bitransitive et que le support de G est en bijection avec les $\mathcal{K}_{P,Q}$-classes, qui sont les ensembles $H_{i\lambda}$.

Nous résumons les deux lemmes précédents dans le théorème:

THÉORÈME 1.22. – *Toute représentation $\Phi = (P, Q)_\Omega$, commutante, symétrique bitransitive est déterminée à une équivalence au sens large près, par la donnée d'une représentation transitive (ou nulle) P_1, d'une anti-représentation transitive (ou nulle) Q_1 et d'un groupe simplement transitif de permutations commun à P_1 et Q_1.*

DÉMONSTRATION. – Le théorème résulte des lemmes 1.20 et 1.21, sauf pour ce qui concerne la détermination de $(P, Q)_\Omega$ à une équivalence au sens large près. Soient $\Phi = (P, Q)_\Omega$ et $\Phi^* = (P^*, Q^*)_{\Omega^*}$ deux représentations commutantes, symétriques, bitransitives. On suppose que P est somme de représentations transitives P_i ($i \in I$), P^* somme de représentations transitives $P^*_{i^*}$ ($i^* \in I^*$); de même pour Q et Q^*. Par hypothèse P_i et $P^*_{i^*}$ sont équivalentes et les groupes simplement transitifs communs à P_i, Q_λ et $P^*_{i^*}$, $Q^*_{\lambda^*}$ sont isomorphes. D'après la construction indiquée dans la démonstration du lemme 1.21 les ensembles d'indices I et I^*, ainsi que Λ et Λ^* sont en bijection. Nous notons de la même façon les indices qui se correspondent. Soit φ, θ les bijections d'équivalence de P_1 et P^*_1, φ', θ' celles de Q_1 et Q^*_1. On choisit q_λ, $q'_\lambda \in D$, r_i, $r'_i \in D$ tels que $P(q_\lambda)$ et $P(q'_\lambda)$ définissent des bijections réciproques de H_{11} sur $H_{1\lambda}$, $Q(r_i)$ et $Q(r'_i)$ des bijections réciproques de H_{11} sur H_{i1} (cf. démonstration du lemme 1.21). On note $\theta[P(q_\lambda)]$ par $P^*(\bar{q}_\lambda)$ et de même pour les autres éléments particularisés; $P(q'_\lambda)Q(s'_i)\varphi P^*(r_\lambda)Q^*(s_i)$ définit une bijection de $H_{i\lambda}$ sur $H^*_{i\lambda}$. Elle s'étend en une bijection Ψ de Ω sur Ω^* en faisant varier i et λ dans I et Λ. On vérifie alors sans difficulté que $P(x)\Psi = \Psi P^*(x)$. En définissant de même une bijection Ψ' à partir de $P(q'_\lambda)Q(s'_i)\varphi' P^*(\bar{r}_\lambda)Q^*(\bar{s}_i)$ on obtient $Q(x)\Psi' = \Psi' Q^*(x)$, ce qui achève de prouver que $(P, Q)_\Omega$ et $(P^*, Q^*)_{\Omega^*}$ sont équivalentes au sens large.

Revenant au corollaire 1.14 nous appelons *équivalence de transitivité à droite* une équivalence à droite sur D^1 dont l'une des classes R est un idéal droite ne contenant pas 1, résidu à droite de toutes les autres classes (si $R = \emptyset$ toutes les classes sont nettes à droite). D'après le théorème précédent on a :

COROLLAIRE 1.23. – *Pour qu'un demi-groupe D admette une représentation $\Phi = (P, Q)_\Omega$ commutante, symétrique, bitransitive telle que P et Q ne soient pas nulles, il faut et il suffit qu'il existe une équivalence de transitivité à droite et une équivalence de transitivité à gauche sur D^1.*

De même la possibilité d'existence de représentations commutantes, symétriques, se traduit par l'existence de *familles* d'équivalences de transitivité à droite et à gauche.

4. – Noyaux de représentations complètes.

Le noyau d'une représentation P_Ω d'un demi–groupe D est l'équivalence nucléaire $\mathcal{E}_P$ de l'homomorphisme P: $\mathcal{E}_P = \{(x, y) \in D \times D : P(x) = P(y)\}$. Le noyau d'une représentation complète $\Phi = (P, Q)_\Omega$ est de même la congruence $\mathcal{E}_\Phi = \mathcal{E}_P \cap \mathcal{E}_Q$, équivalence nucléaire de Φ. Lorsque $\mathcal{E}_\Phi$ est l'égalité sur D, Φ est dite *fidèle*. Si Φ est somme de représentations complètes Φ_i on a: $\mathcal{E}_\Phi = \cap\, \mathcal{E}_{\Phi_i}$.

PROPOSITION 1.24. – *Le noyau d'une représentation commutante, cyclique* $\Phi = (P, Q)_\Omega$ *d'un demi–groupe* D, *définie par une équivalence régulière à droite* ρ *sur* $D^1 \times (D^1)^*$ (cf. proposition 1.11) *est*:

$$\mathcal{E}_\Phi = \{(x, y) \in D : \forall\, u,\ v \in D^1,\ (ux, v) \equiv (uy, v) \pmod{\rho} \text{ et } (u, xv) \equiv (u, yv) \pmod{\rho}\}.$$

DÉMONSTRATION. – Supposons $P(x) = P(y)$. Nous employons les notations définies avant la proposition 1.11.

Si $(u, v)\ (x, 1) \notin H$, $(u, v) \in H_\alpha$ et $(ux, v) \in H_\beta$. Il en résulte $(\alpha, \beta) \in P(x) = P(y)$, d'où $(u, v)\ (y, 1) \in H_\beta$ c'est–à–dire $(ux, v) \equiv (uy, v) \pmod{\rho}$.

Si $(u, v)\ (x, 1) \in H$, alors $(u, v)\ (y, 1) \in H$, sinon le raisonnement précédent impliquerait $(u, v)\ (x, 1) \notin H$.

Réciproquement, supposons que pour tout $u, v \in D^1$, $(ux, v) \equiv (uy, v) \pmod{\rho}$. Alors: $H_\alpha(x, 1) \subseteq H_\beta \Rightarrow (u, v) \in H_\beta$ pour tout $(u, v) \in H_\alpha$. Donc $(u, v)\ (y, 1) \in H_\beta$ et $H_\alpha(y, 1) \subseteq H_\beta$ ce qui prouve $P(x) \subseteq P(y)$. De même $P(y) \subseteq P(x)$ et

$$\mathcal{E}_P = \{(x, y) \in D \times D : \forall\, u, v \in D^1,\ (ux, v) \equiv (uy, v) \pmod{\rho}\}.$$

COROLLAIRE 1.25. – *Un demi–groupe* D *a une représentation commutante, fidèle si et seulement si il existe une famille d'équivalences régulières à droite* ρ_i $(i \in I)$ *sur* $D^1 \times (D^1)^*$ *ayant chacune un idéal à droite* H_i *ne contenant pas* $(1, 1)$ *comme classe, et telles que*:

$(ux, v) \equiv (uy, v)$ et $(u, xv) \equiv (u, yv) \pmod{\rho_i}$ pour tout $i \in I$, $u \in D^1$, $v \in D^1 \Rightarrow x = y$.

Cela résulte de la proposition précédente et du corollaire 1.10.

Une autre forme du corollaire précédent utilise la notion de produit sous–direct ([1], p. 91, 92; th. 9). Un demi–groupe est dit *commutant cyclique* s'il admet une représentation commutante, cyclique, fidèle. *Il est dit bitransitif s'il admet une représentation commutante, symétrique, bitransitive, fidèle.*

COROLLAIRE 1.26. – *a) Un demi–groupe a une représentation commutante, fidèle si et seulement si il est isomorphe à un produit sous–direct de demi–groupes commutants cycliques.*

b) Un demi–groupe a une représentation symétrique, fidèle si et seulement si il est isomorphe à un produit sous–direct de demi–groupes bitransitifs.

DÉMONSTRATION – Nous démontrons *b*) [pour *a*) la démonstration est analogue]. Si D a une représentation commutante, symétrique, fidèle Φ, Φ est somme de représentations commutantes, symétriques, bitransitives Φ_i (prop. 1.16) $\mathcal{E}_\Phi = \cap \mathcal{E}_{\Phi_i}$ est l'égalité. D'après le théorème 9 de [1], D est isomorphe à un produit sous–direct des demi–groupes $D/\mathcal{E}_{\Phi_i} = \bar{D}$. La représentation commutante, symétrique, bitransitive Φ_i est équivalente à une représentation définie par une équivalence ρ_i sur $D^1 \times (D^1)^*$. Les propriétés de ρ_i (cf. prop. 1.13; la symétrie s'exprime de façon évidente) se conservent par passage au quotient et permettent de définir sur $\bar{D}^1 \times (\bar{D}^1)^*$ une équivalence ρ_i, fournissant une représentation commutante, symétrique, bitransitive, fidèle, d'après l'expression de $\mathcal{E}_{\Phi_i}$ indiquée à la proposition 1.24.

Inversement, si D est un produit sous–direct de demi–groupes bitransitifs, il existe une famille de congruences $\mathcal{E}_i$ sur D, telles que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i$ soit l'égalité et telles que $D/\mathcal{E}_i$ ait une représentation Φ_i commutante, symétrique, bitransitive, fidèle sur Ω_i. On pose $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ (les Ω_i sont supposés disjoints sinon on se ramène à ce cas en remplaçant les Φ_i par des représentations équivalentes), puis on définit $P_\Omega(x)$ par $(\alpha, \beta) \in P_\Omega(x) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in (\Omega_i \times \Omega_i) \cap P_i(\bar{x}_i)$ où $\bar{x}_i$ désigne la classe de x modulo $\mathcal{E}_i$; $Q_\Omega(x)$ est défini de la même façon. On obtient une représentation $(P, Q)_\Omega$ commutante, symétrique, fidèle.

En ce qui concerne le noyau d'une représentation commutante, symétrique, bitransitive on a :

PROPOSITION 1.27. – *Toute représentation commutante, symétrique, bitransitive, $\Phi = (P, Q)_\Omega$ d'un demi–groupe D, a même noyau que la représentation par des matrices monomiales (M_Φ, M'_Φ), qui lui est associée* (cf. théorème 1.19).

DÉMONSTRATION. – Si $P(x) = P(y)$, on a $m_{\lambda\mu}(x) = m_{\lambda\mu}(y)$ car $H_{1\lambda}P(x) = H_{1\mu} \Leftrightarrow H_{1\lambda}P(y) = H_{1\mu}$ et dans le cas où on a effectivement $H_{1\lambda}P(x) = H_{1\mu}$, $\gamma_{q_\lambda x q'_\mu}$ défini comme restriction à H de l'application $\alpha \to \alpha P(q_\lambda x q'_\mu) = \alpha P(q_\lambda y q'_\mu)$, coïncide avec $\gamma_{q_\lambda y q'_\mu}$. Donc $M_\Phi(x) = M_\Phi(y)$.

Inversement, supposons $M_\Phi(x) = M_\Phi(y)$ et soit $(\alpha, \beta) \in P(x)$; d'après le lemme de GREEN (1.17), $\xi \to \xi P(x)$ définit une bijection de $\alpha\rho_Q$ sur $\beta\rho_Q$. Si $\alpha \in H_{i\lambda}$ et $\beta \in H_{i\mu}$, alors $H_{1\lambda}P(x) = H_{1\mu}$ et $m_{\lambda\mu}(x) = \gamma_{q_\lambda x q'_\mu}$. Il en résulte $(m_{\lambda\mu}(x) = m_{\lambda\mu}(y))$: $\gamma_{q_\lambda x q'_\mu} = \gamma_{q_\lambda y q'_\mu}$. Pour tout $\alpha \in H = H_{11}$, $\alpha P(q_\lambda x q'_\mu) = \alpha P(q_\lambda y q'_\mu) \in H$. Donc pour tout $\alpha_{1\lambda} \in H_{1\lambda}$, $\alpha_{1\lambda}P(x) = \alpha_{1\lambda}P(y)$, car $P(q_\lambda)$ et $P(q'_\mu)$ définissent des bijections.

Enfin, en prenant $\alpha_{i\lambda}^0 \in H_{i\lambda}$ et $\mu \in D$ de sorte que $\alpha = \alpha_{i\lambda}^0 Q(u)$, on a : $\alpha P(x) = \alpha_{i\lambda}^0 Q(u) P(x) = \alpha_{i\lambda}^0 P(x) Q(u) = \alpha_{i\lambda}^0 P(y) Q(u) = \alpha_{i\lambda}^0 Q(u) P(y) = \alpha P(y) = \beta$; donc $P(x) = P(y)$. Le noyau de P coïncide avec celui de M_Φ, d'où la proposition.

Un demi-groupe est dit *transitif à droite* [à gauche], si et seulement si il admet une représentation [anti-représentation] transitive, fidèle.

Nous appelons demi-groupe restreint de couples de matrices, un demi-groupe S formé de couples (M, M') où M est une matrice à lignes monomiales sur un groupe avec zéro G^0, de format $\Lambda \times \Lambda$, M' une matrice à colonnes monomiales sur un groupe avec zéro anti-isomorphe au précédent, de format $I \times I$, et telle que toute entrée de M ou de M' puisse être remplie arbitrairement (pour tout $g \in G$, il existe un couple $(M, M') \in S$ tel que M ait g en position λ, μ, et pour tout $g' \in G'$, il existe un couple $(M, M') \in S$ tel que M' ait g' en position i, j).

PROPOSITION 1.28. – *Il y a équivalence entre* :

a) D est un demi-groupe bitransitif ;

b) D est transitif à droite ou à gauche, ou est isomorphe à un produit sous-direct d'un demi-groupe transitif à droite et d'un demi-groupe transitif à gauche ;

c) Il existe une équivalence de transitivité à droite ρ *et une équivalence de transitivité à gauche* λ [11] *sur* D^1, *telles que* $(ua, ub) \in \rho$ *et* $(av, bv) \in \lambda$ *pour tout* $u, v \in D^1$, *implique* $a = b$;

d) D est un isomorphe à un demi-groupe restreint de couples de matrices monomiales.

DÉMONSTRATION. – $a) \Rightarrow b)$: résulte du théorème 1.22.

$b) \Rightarrow c)$: D a une représentation et une anti-représentation transitive équivalentes à des représentations définies par P_ρ et Q_λ (corollaire 1.14). La congruence $\mathcal{E}_{P_\rho} \cap \mathcal{E}_{Q_\lambda}$ est l'égalité sur D, d'où $c)$.

$c) \Rightarrow a)$: résulte du corollaire 1.23 et du fait que D a une représentation commutante, symétrique, bitransitive $\Phi = (P, Q)_\Omega$ où P est somme de représentations équivalentes à P_ρ, Q somme d'anti-représentations équivalentes à Q_λ (théorème 1.22) : $\mathcal{E}_\Phi = \mathcal{E}_{P_\rho} \cap \mathcal{E}_{Q_\rho}$ qui est l'égalité donc D est bitransitif. Les cas où D est transitif à droite ou à gauche s'obtiennent trivialement.

$a) \Leftrightarrow d)$: l'implication $a) \Rightarrow d)$ résulte de la proposition 1.27. Pour établir $d) \Rightarrow a)$, il suffit de montrer qu'un demi-groupe T de matrices à lignes monomiales (format $\Lambda \times \Lambda$) sur un groupe avec zéro G^0, et dont les lignes peuvent être

[11] L'une des équivalences ρ ou λ peut ne pas exister. Si c'est λ, ρ vérifie : $(ua, ub) \in \rho$ pour tout $u \in D^1 \Rightarrow a = b$.

remplies arbitrairement, est transitif à droite. Soit H le support de G, H_λ ($\lambda \in \Lambda$) une famille d'ensembles disjoints en bijection b_λ avec $H(H_\lambda \xrightarrow{b_\lambda} H)$. Posons $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$. A tout $m \in T$, $m = (g_{\lambda\mu})$ avec $g_{\lambda\mu} \in G \cup \{0\}$ on associe $P(m)$ défini par

$$(\alpha, \beta) \in P(m) \Leftrightarrow \alpha \in H_\lambda,\ \beta \in H_\mu,\ g_{\lambda\mu} \neq 0 \text{ et } (\alpha b_\lambda) g_{\lambda\mu} = \beta b_\mu.$$

$P(m)$ est une transformation sur Ω: si $(\alpha, \beta) \in P(m)$ et $(\alpha, \beta') \in P(m)$ alors β et $\beta' \in H_\mu$ (lignes monomiales) et $(\alpha b_\lambda) g_{\lambda\mu} = \beta b_\mu = \beta' b_\mu$ d'où $\beta = \beta'$. P définit une représentation:

$$(\alpha, \beta) \in P(mm') \Leftrightarrow \alpha \in H_\lambda,\ \beta \in H_\mu \text{ et } (\alpha, \beta) \in b_\lambda g_{\lambda\mu} (b_\mu)^{-1} \text{ et}$$

$$g_{\lambda\mu} = g_{\lambda\nu} g_{\nu\mu} \Leftrightarrow \alpha \in H_\lambda,\ \gamma \in H_\nu,\ \beta \in H_\mu,\ (\alpha, \gamma) \in b_\lambda g_{\lambda\nu} (b_\nu)^{-1} \text{ et}$$

$$(\gamma, \beta) \in b_\nu g_{\nu\mu} (b_\mu)^{-1} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in P(m) P(m').$$

Cette représentation est transitive: si $\alpha, \beta \in \Omega$ avec $\alpha \in H_\lambda$ et $\beta \in H_\mu$ alors $\alpha b_\lambda = \alpha' \in H$ et $\beta b_\mu = \beta' \in H$; il existe $g \in G$ tel que $\alpha' g = \beta'$ et il existe une matrice $m \in T$, telle que $m_{\lambda\mu} = g$. D'après la définition de P, $\alpha P(m) = \beta$. Enfin P est fidèle: supposons $P(m) = P(m')$; pour tout $\gamma \in H$ et pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$ tels que $g_{\lambda\mu} \neq 0$: $\gamma g_{\lambda\mu} = \delta \in H$; en prenant $\alpha, \beta \in \Omega$ tels que $\alpha b_\lambda = \gamma$ et $\beta b_\mu = \delta$ on a: $(\alpha, \beta) \in P(m) = P(m')$; il en résulte $g'_{\lambda\mu} \neq 0$ et $\gamma_{g'_{\lambda\mu}} = \delta$; donc $g'_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}$. Les matrices m et m' ont les mêmes entrées non nulles à la même place: $m = m'$.

CHAPITRE II.

Translations partielles - Représentation canonique des demi-groupes réguliers - Problèmes de structure.

1. – Translations partielles.

Soit D un demi–groupe quelconque et soit θ une relation binaire sur D. On définit une application de D dans le demi–groupe $\mathfrak{T}_D$ des transformations sur D, en posant pour tout $x \in D$

$$\rho_\theta(x) = \{(a, b) \in D \times D : ax = b \text{ et } (a, b) \in \theta\}.$$

On constate immédiatement que ρ_θ définit une représentation de D si et seulement si θ vérifie la condition

(T_r) *pour tout* $a, b, c \in D$: $(a, abc) \in \theta \Leftrightarrow (a, ab) \in \theta$ *et* $(ab, abc) \in \theta$.

On définit de la même façon une transformation $\lambda_\Psi(x)$ associée à une relation binaire Ψ sur D: $\lambda_\Psi(x) = \{(a, b) \in D \times D : xa = b \text{ et } (a, b) \in \Psi\}$. L'ap-

plication λ_Ψ de D dans $\mathcal{T}_D$ est une anti–représentation si et seulement si Ψ vérifie la condition

$$(T_l) \text{ pour tout } a, b, c \in D : (a, cba) \in \Psi \Leftrightarrow (a, ba) \in \Psi \text{ et } (ba, cba) \in \Psi.$$

DÉFINITION 2.1. – *On appelle translation partielle à droite définie par* θ *sur* D, *la transformation* $\rho_\theta(x)$ *de* D *définie par* : $a\rho_\theta(x) = ax \Leftrightarrow (a, ax) \in \theta$ *où* θ *vérifie la condition* (T_r). *De même une translation partielle à gauche définie par* Ψ, *est la transformation* $\lambda_\Psi(x)$ *de* D, *telle que* $a\lambda_\Psi(x) = xa \Leftrightarrow (a, xa) \in \Psi$, *où* Ψ *vérifie la condition* (T_l).

Soit $\mathfrak{R}$ définie par: $(a, b) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow$ il existe $u \in D$ tel que $au = b$. Pour toute relation binaire θ contenant $\mathfrak{R}$ la condition (T_r) est remplie d'office: les translations partielles correspondantes coïncident alors avec les translations à droite $\rho(x)$ partout définies sur D. En posant $\theta' = \theta \cap \mathfrak{R}$ on a $\rho_\theta(x) = \rho_{\theta'}(x)$ pour tout $x \in D$; en effet, si $(a_1, a_2) \in \rho_\theta(x)$, $a_1 x = a_2$ et $(a_1, a_2) \in \theta$ d'où $(a_1, a_2) \in \rho_{\theta'}(x)$ et si $(a_1, a_2) \in \rho_{\theta'}(x)$ on a aussi $(a_1, a_2) \in \rho_\theta(x)$ puisque $\theta' \subseteq \theta$. Pour des relations $\theta \subseteq \mathfrak{R}$ l'application $\theta \to \rho_\theta$ est donc injective. Indiquons quelques propriétés élémentaires des translations partielles :

PROPRIÉTÉS 2.2. – *a*) Si la représentation ρ_θ est *fidèle*, il en est de même de $\rho_{\theta'}$, pour $\theta' \supseteq \theta$.

En effet $\rho_{\theta'}(x) = \rho_{\theta'}(y) \Rightarrow \rho_\theta(x) = \rho_\theta(y) \Rightarrow x = y$. (Plus généralement si $\theta \subseteq \theta'$, le noyau de $\rho_{\theta'}$ est contenu dans celui de ρ_θ). Il en résulte que si D a une représentation fidèle par des translations partielles à droite, il est réductif à gauche : $xa = xb$ pour tout $x \in D \Rightarrow a = b$.

b) Une transformation partielle x sur un ensemble Ω est dite *injective* si : $\alpha x = \beta x = \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ pour $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$. Si D a une représentation ρ_θ par des translations partielles à droite injectives, alors pour $\theta' \subseteq \theta$, $\rho_{\theta'}$ est une représentation par translations partielles injectives : en effet,

$$a\rho_{\theta'}(x) = b\rho_{\theta'}(x) = c \Rightarrow a\rho_\theta(x) = b\rho_\theta(x) = c \Rightarrow a = b.$$

c) La relation de transitivité de la représentation ρ_θ est $\theta \cap \mathfrak{R}$. Donc ρ_θ est *transitive* si et seulement si $\theta \cap \mathfrak{R}$ est la relation universelle, c'est–à–dire si D est simple à droite et si $\rho_\theta(x)$ est la translation partout définie.

d) Supposons que θ soit une relation réflexive. La représentation ρ_θ est symétrique si et seulement si $\rho_\theta(x) = \rho_{\mathcal{R}}(x)$ pour tout $x \in D$, $\mathcal{R}$ désignant l'équivalence de GREEN. En effet, si $a\rho_\theta(x) = b$, il existe y tel que $b\rho_\theta(y) = a$ d'où $(a, b) \in \mathcal{R}$ et $a\rho_{\mathcal{R}}(x) = b$; inversement, si $a\rho_{\mathcal{R}}(x) = b$, il existe $y \in D$ tel que $by = a$. Comme $a = axy$ et θ est reflexive, (T_r) implique $(a, b) \in \theta$ d'où $a\rho_\theta(x) = b$. On déduit de ce résultat que si D a une représentation ρ_θ et une anti–représentation λ_Ψ, symétriques et définies par des relations θ, Ψ réfle-

xives, la représentation complète $(\rho_\theta, \lambda_\Psi)$ qui coïncide alors avec $(\rho_{\mathcal{R}}, \lambda_{\mathcal{L}})$ est commutante : cela résulte immédiatement du fait que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ commutent.

e) En ce qui concerne les translations partielles définies par une équivalence, nous avons :

PROPOSITION 2.3. - *Si* θ *est une relation d'équivalence, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) ρ_θ *est une représentation* $(a\rho_\theta(x) = b \Leftrightarrow ax = b$ *et* $(a, b) \in \theta)$;

b) θ *vérifie* : $(a, abc) \in \theta \Rightarrow (a, ab) \in \theta$ *pour tout* $a, b, c \in D$;

c) *Chaque* θ*–classe est de la forme* $R \setminus R'$ *où* R *et* R' *sont des idéaux à droite de* D, R' *pouvant être vide* ;

d) ρ_θ *est somme de représentations* $\rho_{A_i \times A_i}$ *où* A_i *parcourt l'ensemble des* θ*–classes.*

DÉMONSTRATION. – *a*) $\Rightarrow$ *b*) est évident. *b*) $\Rightarrow$ *c*) : en effet chaque θ–classe A vérifie : $a \in A$ et $abc \in A \Rightarrow ab \in A$. Posons alors $R = A \cup AD$ et $R' = \{z ; z \in AD \setminus A\}$. Si R' n'est pas vide, c'est un idéal à droite : pour tout $z \in R'$, $z = ax$ avec $a \in A$ et pour tout $d \in D$, $zd = axd \in AD \setminus A$ ($zd \notin A$ sinon $axd \in A$ et $a \in A$ impliqueraient $ax = z \in A$, ce qui n'est pas). Enfin $A = R \setminus R'$: on a $A \subseteq R \setminus R'$ et si $b \in R \setminus R'$, $b \in A$ (sinon : $b \in R \Rightarrow b \in AD \Rightarrow b \in R'$, ce qui contredit $b \in R \setminus R'$).

c) $\Rightarrow$ *d*) est évident. *d*) $\Rightarrow$ *a*) résulte du fait qu'un complexe A définit des translations partielles à droite $\rho_{A \times A}(x)$ si et seulement si $A = R \setminus R'$ où R et R' sont des idéaux à droite de D (R' est éventuellement vide). Les translations partielles $\rho_{A \times A}(x)$ sont alors des transformations sur le complexe A [12].

2. – Représentation canonique des demi-groupes réguliers.

THÉORÈME 2.4. – *Tout demi–groupe régulier* D *a une représentation commutante, symétrique, fidèle, par des translations partielles sur lui–même.*

DÉMONSTRATION. – D'après les propriétés 2.2 *b*), il suffit de montrer que l'application $x \to [\rho_{\mathcal{R}}(x), \lambda_{\mathcal{L}}(x)]$ de D dans $\mathcal{T}_D \times \mathcal{T}_D^*$ est une injection. Supposons donc que $\rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho_{\mathcal{R}}(y)$ et $\lambda_{\mathcal{L}}(x) = \lambda_{\mathcal{L}}(y)$. Soit x' un inverse de x ; comme $xx'x = x$ et $(xx', x) \in \mathcal{R}$, on en déduit $(xx', x) \in \rho_{\mathcal{R}}(x)$. Il en résulte

[12] Dans [16], LJAPIN a montré que si un demi-groupe D admet une représentation P_Ω, il est possible de plonger D dans un demi-groupe D' de sorte que P_Ω soit équivalente à une représentation de D par des translations partielles sur D' du type $\rho_{A \times A}$, où A est un complexe de D' différence d'idéaux à droite. Le résultat de LJAPIN s'étend aux représentations complètes.

$xx'y = x$, c'est-à-dire $x \in Dy$. En désignant de même par y' un inverse de y, on obtient $yy'x = y$, c'est-à-dire $y \in Dx$. Donc $\rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho_{\mathcal{R}}(y)$ implique $(x, y) \in \mathcal{L}$. De même $\lambda_{\mathcal{L}}(x) = \lambda_{\mathcal{L}}(y)$ implique $(x, y) \in \mathcal{R}$. En particulier, $y \in xD = xx'D$, donc $xx'y = y$. Comme $xx'y = x$, $x = y$.

Ce théorème ne caractérise pas les demi-groupes réguliers, comme le montre le contre-exemple suivant. Soit D un demi-groupe simple à droite, simplifiable à droite, sans idempotents ([13]), et réductif à gauche. Dans un tel demi-groupe, l'équivalence $\mathcal{R}$ est l'équivalence universelle; la représentation $\rho_{\mathcal{R}}$ est donc la représentation de D par des translations à droite; D étant réductif à gauche $\rho_{\mathcal{R}}$ est fidèle, donc aussi $(\rho_{\mathcal{R}}, \lambda_{\mathcal{L}})$. Un exemple concret d'un tel demi-groupe est fourni par le demi-groupe $\mathfrak{I}_N$ de toutes les injections x de l'ensemble N des entiers naturels dans lui-même, telles que $N - Nx$ soit dénombrable. On sait ([14]) qu'un tel demi-groupe est simple à droite, simplifiable à droite et sans idempotent. Il est aussi réductif à gauche: si $xa = xb$ pour tout $x \in \mathfrak{I}_N$ et si $\alpha a = \beta$ avec $\alpha \in N$, ou bien α est pair et l'application $x_0 : \xi \to 2\xi (\xi \in N)$ est dans $\mathfrak{I}_N : x_0 a = x_0 b$ entraîne $\frac{\alpha}{2} x_0 a = \frac{\alpha}{2} x_0 b = \beta$ d'où $\alpha b = \beta$, ou bien α est impair et l'application $x_1 : \xi \to 2\xi + 1$ est dans $\mathfrak{I}_N : x_1 a = x_1 b$ entraîne $\frac{\alpha - 1}{2} x_1 a = \frac{\alpha - 1}{2} x_1 b = \beta$, d'où $\alpha b = \beta$. On en déduit $a = b$.

COROLLAIRE 2.5 [23]. – *La somme directe* ([15]) *des représentations et des anti-représentations de Schützenberger définies par les diverses $\mathfrak{D}$-classes d'un demi-groupe régulier est fidèle.*

Ce corollaire résulte du théorème 2.4, des propriétés 1.16 et 1.27.

COROLLAIRE 2.6. – *Tout demi-groupe régulier et isomorphe à un produit sous-direct de demi-groupes réguliers bitransitifs et à un produit sous-direct de demi-groupes réguliers transitifs à droite et à gauche.*

Cela résulte du théorème 2.5, des propositions 1.16 et 1.28.

Dans la suite la représentation complète $(\rho_{\mathcal{R}}, \lambda_{\mathcal{L}})$ sera dite *représentation canonique.* Dans cette représentation le sous-demi-groupe de $\mathfrak{T}_D \times \mathfrak{T}_D^*$ image de D régulier est formé de transformations partielles possèdant des propriétés

---

([13]) et ([14]) Voir à ce propos, les résultats de M. TEISSIER, C. R. Acad. Sc. Paris 236 (1953), p. 1120-1122 et 237 (1953), p. 1375-1377.

([15]) Si $x \to M_i(x)$ $(i \in I)$ est une famille de représentations d'un demi-groupe D par des matrices sur un groupe avec zéro, la somme directe des M_i est la représentation $x \to [M_i(x)]$ de D dans le produit cartésien des demi-groupes $M_i(D)$ (cf. [2], p. 117).

d'injectivité partielle qui s'expriment par :

$$a\rho_{\mathcal{R}}(x) = b\rho_{\mathcal{R}}(x) = c \quad \text{et} \quad (a, b) \in \tau_{\lambda_{\mathcal{L}}} \Rightarrow a = b\,;$$

$$a\lambda_{\mathcal{L}}(x) = b\lambda_{\mathcal{L}}(x) = c \quad \text{et} \quad (a, b) \in \tau_{\rho_{\mathcal{R}}} \Rightarrow a = b.$$

($\tau_{\lambda_{\mathcal{L}}}$ et $\tau_{\rho_{\mathcal{R}}}$ sont les relations de transitivité de $\lambda_{\mathcal{L}}$ et $\rho_{\mathcal{R}}$: elles coïncident ici avec $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$).

Ces propriétés sont valables pour toute représentation commutante, symétrique, et résultent immédiatement du lemme de GREEN (1.17). Les théorèmes suivants caractérisent des demi-groupes réguliers par des propriétés de leur représentation canonique :

THÉORÈME 2.7. – *Un demi-groupe régulier est inverse si et seulement si sa représentation canonique est une représentation par des transformations partielles injectives. Dans ce cas* $\rho_{\mathcal{R}}$ *et* $\lambda_{\mathcal{L}}$ *sont fidèles* [23].

DÉMONSTRATION. – *a*) Soit D un demi-groupe inverse. Si $a\rho_{\mathcal{R}}(x)=b\rho_{\mathcal{R}}(x)=c$, $(ax,\ a) \in \mathcal{R}$ implique $(ax)\,(ax)^{-1}a = a$. Or dans un demi-groupe inverse $(ax)^{-1} = x^{-1}a^{-1}$. Donc :

$$a = axx^{-1}a^{-1}a = aa^{-1}axx^{-1} = axx^{-1}$$

($a^{-1}a$ et xx^{-1} sont des idempotents qui commutent).

On démontrerait de même que $(bx, b) \in \mathcal{R}$ implique $b=bxx^{-1}$. Comme $ax=bx=c$, on a : $cx^{-1} = axx^{-1} = bxx^{-1}$, c'est-à-dire $a = b$. De même $\lambda_{\mathcal{L}}(x)$ est injective pour tout $x \in D$.

Pour établir que $\rho_{\mathcal{R}}$ est une représentation fidèle, supposons que $\rho_{\mathcal{R}}(x)=\rho_{\mathcal{R}}(y)$. Comme dans la démonstrationdu théorème 2.4, on obtient: $xx^{-1}y=x$ et $yy^{-1} = y$, d'où $y\lambda_{\mathcal{L}}(xx^{-1}) = x = x\lambda_{\mathcal{L}}(xx^{-1})$. Mais $\lambda_a(xx^{-1})$ est une injection donc $x = y$. On démontre de même que $\lambda_{\mathcal{L}}$ est fidèle.

b) Soit D un demi-groupe régulier dont la représentation canonique s'effectue par des injections. Chaque $\mathcal{R}$–classe de D contient un idempotent unique. En effet, si e, f sont deux idempotents équivalents, $e \in fD$ implique $fe = e$. Donc $(f,\ e) \in \rho_{\mathcal{R}}(e)$. Par ailleurs $(e,\ e) \in \rho_{\mathcal{R}}(e)$; d'où $e = f$. De même chaque $\mathcal{L}$–classe de D contient un seul idempotent. Il en résulte que D est un demi-groupe inverse.

Il ressort de la démonstration précédente, que pour un demi-groupe inverse $\rho_{\mathcal{R}}(x)$ est une transformation dont la première projection est Dxx^{-1} et la seconde Dx : en effet, si $(a, c) \in \rho_{\mathcal{R}}(x)$, $a = axx^{-1} \in Dxx^{-1}$ et $c = ax \in Dx$.

Donc $\rho_{\mathcal{R}}(x)$ est une application de $Dxx^{-1} = Dx^{-1}$ sur Dx. Il peut arriver que pour tout $x \in D$ (D supposé régulier) la première projection de $\rho_{\mathcal{R}}(x)$ ou de $\lambda_{\mathcal{L}}(x)$ soit D tout entier, c'est-à-dire que $\rho_{\mathcal{R}}(x)$ soit une translation interne sur D.

PROPOSITION 2.8. – *Soit D un demi-groupe régulier et $(\rho_{\mathcal{R}}, \lambda_{\mathcal{L}})$ sa représentation canonique. Il y a équivalence entre:*

a) $\rho_{\mathcal{R}}(x)$ *est la translation interne à droite* $\rho(x)$ *pour tout* $x \in D$;

b) $\lambda_{\mathcal{L}}(x)$ *est la translation interne à gauche* $\lambda(x)$ *pour tout* $x \in D$;

c) D est complètement simple.

DÉMONSTRATION. – *a)* $\Rightarrow$ *c).* Si D n'est pas réduit à zéro, D est sans zéro: sinon pour $a \neq 0$, $a \cdot 0 = 0$ implique $(a, 0) \in \rho(0) = \rho_{\mathcal{R}}(0)$, d'où $a = 0$ ce qui est une contradiction. Soient e, f deux idempotents de D tels que $ef = fe = e$. Comme $fe = e$, $(f, e) \in \rho(e)$. Il en résulte $(f, e) \in \rho_{\mathcal{R}}(e)$, d'où $(f, e) \in \mathcal{R}$ et $f = ef = e$. D est régulier, sans zéro, et tous ses idempotents sont primitifs: il est donc complètement simple ([2], ex. 11, p. 84).

c) $\Rightarrow$ *a).* Si D est complètement simple $ax = b$ implique $(a, b) \in \mathcal{R}$: c'est évident lorsqu'on représente D comme demi-groupe de matrices de REES.

Une caractérisation analogue des demi-groupes complètement 0-simples nécessite l'introduction de translations partielles définies sur le complexe $D - (0)$ (cf. démonstration de la prop. 2.3, *d)* $\Rightarrow$ *a)*). Nous notons $D - (0)$ par D_0; $\rho_{D_0}(x)$ désigne la translation partielle définie par

$(a, b) \in \rho_{D_0}(x) \Leftrightarrow ax = b$ avec $a \neq 0$, $b \neq 0$; $\rho_0(x)$ est la translation définie par $0x = 0$ et on définit symétriquement $\lambda_{D_0}(x)$ et $\lambda_0(x)$.

THÉORÈME 2.9. – *Soit D un demi-groupe régulier avec zéro et non réduit à zéro; soit $(\rho_{\mathcal{R}}, \lambda_{\mathcal{L}})$ sa représentation canonique. Il y a équivalence entre:*

a) $\rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho_{D_0}(x) \cup \rho_0(x)$ *pour tout* $x \in D$;

b) $\lambda_{\mathcal{L}}(x) = \lambda_{D_0}(x) \cup \lambda_0(x)$ *pour tout* $x \in D$;

c) tout idempotent de D est primitif $(e = e^2, f = f^2, ef = fe = e \neq 0 \Rightarrow e = f)$.

d) D est somme orthogonale de demi-groupes complètement 0-simples [16].

DÉMONSTRATION. – *a)* $\Rightarrow$ *c).* Supposons $ef = fe \neq 0$; $(e, ef) \in \rho_{D_0}(f)$ donc $(e, ef) \in \rho_{\mathcal{R}}(f)$. Comme ef est un idempotent $(ef \cdot ef = e \cdot ef = ef)$, il résulte de $(e, ef) \in \mathcal{R}$: $e = efe = ef = fe$. Symétriquement $f = fe = ef$. D'où $e = f$.

---

[16] $D = \bigcup_{i \in I} S_i$ où les demi-groupes S_i sont complètement 0-simples et vérifient $S_i \cap S_j = (0)$ et $S_i \cdot S_j = (0)$ pour $i \neq j$. (cf. [6']).

c)$\Rightarrow$*d)*. Sur $D-(0)$ posons : $(a, b)\in\sim\Leftrightarrow aDb\neq 0$. La relation $\sim$ est réflexive car D est régulier, symétrique : si $axb\neq 0$, il existe y tel que $axbyaxb=axb\neq 0$. Pour montrer la transitivité notons que si e, f et g sont des idempotents tels que $ef\neq 0$ et $fg\neq 0$ alors $efg\neq 0$; en effet, si $(ef)'$ est un inverse de ef, $f(ef)'e$ est un idempotent k non nul ; comme $fk=k\neq 0$, on a $kf\neq 0$ (sinon $kfk=k$ serait nul). L'élément kf est un idempotent $(kf\cdot kf=k(fk)f=kf)$ tel que $kf\cdot f=f\cdot kf\neq 0$; il en résulte $kf=f$. Mais $fg\neq 0$ implique $kfg=kefg\neq 0$. Donc $efg\neq 0$. Supposons maintenant $axb\neq 0$ et $byc\neq 0$. En notant par z' l'inverse d'un élément z : $[(ax)'ax]\,bb'\neq 0$ et $bb'[(byc)(byc)']\neq 0$ d'où $(ax)'axbb'(byc)(byc)'=(ax)'axbyc(byc)'\neq 0$ et $axbyc\neq 0$. Si A_i est une classe de $\sim$, $A_i\cup(0)$ est un sous-demi-groupe D_i : en effet, si $a\in A_i$ et $b\in A_i$, ou bien $ab=0$, ou bien $ab\neq 0$ et $aa'ab\neq 0$ implique $ab\in A_i$. De plus D_i est régulier : si $a\in A_i$, $a'aa'a=a'a\neq 0$ donc $a'\in A_i$. Dans D_i, pour deux idempotents e, $f\in A_i$, $eD_if\neq 0$; en effet, il existe $x\in D$ tel que $exf\neq 0$, $exx'x\neq 0$ donc $x\in A_i$. Pour $i\neq j$ on a $D_i\cdot D_j=(0)$ car si $a_i\cdot b_j\neq 0$ pour $a_i\in A_i$ et $b_j\in A_j$, $a_ib_jb'_jb_j\neq 0$ implique $(a_i, b_j)\in\sim$ c'est-à-dire $i=j$ ce qui est une contradiction. Chaque D_i est un demi-groupe complètement 0-simple ([2], ex. 11, p. 84). Donc D est somme orthogonale de demi-groupes complètement 0-simples.

d)$\Rightarrow$*a)*. Pour tout $x\in D$, $\rho_{\mathcal{R}}(x)\subseteq\rho_{D_0}(x)\cup\rho_0(x)$. Inversement, si $(a, b)\in\rho_i(x)$, $a=b=0$ donc $(a, b)\in\rho_{\mathcal{R}}(x)$ et si $(a, b)\in\rho_{D_0}(x)$, $ax=b$ avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$. On a : $axb'b=b\neq 0$, $axx'x=b\neq 0$, donc a, x, $b\in D_i$ et dans D_i, $ax=b\neq 0$ implique $(a, b)\in\mathcal{R}$ d'où $(a, b)\in\rho_{\mathcal{R}}(x)$.

COROLLAIRE 2.10. – *Soit D un demi-groupe régulier avec zéro, non réduit à zéro et soit $(\rho_{\mathcal{R}}, \lambda_{\mathcal{L}})$ sa représentation canonique. Il y a équivalence entre :*

a) $\rho_{\mathcal{R}}(x)=\rho_{D_0}(x)\cup\rho_0(x)$ *et pour tout* $x, y\in D$ $x\neq 0$, $y\neq 0\Rightarrow\rho_{\mathcal{R}}(x)\cdot\lambda_{\mathcal{L}}(x)\neq 0$;

b) $\lambda_{\mathcal{L}}(x)=\lambda_{D_0}(x)\cup\lambda_0(x)$ *et pour tout* $x, y\in D$ $x\neq 0$, $y\neq 0\Rightarrow\rho_{\mathcal{R}}(x)\cdot\lambda_{\mathcal{L}}(x)\neq 0$;

c) D est complètement 0-simple.

En effet la condition $\rho_{\mathcal{R}}(x)\cdot\lambda_{\mathcal{L}}(y)\neq 0$ pour tout $x\neq 0$, $y\neq 0$ signifie que la somme orthogonale du théorème 2.9 n'a qu'un composant.

L'utilisation de la représentation $(\rho^0_{\mathcal{R}}, \lambda^0_{\mathcal{L}})$ où $\rho^0_{\mathcal{R}}(x)=\rho_{\mathcal{R}}(x)\cap(D_0\times D_0)$ et $\lambda^0_{\mathcal{L}}(x)=\lambda_{\mathcal{L}}(x)\cap(D_0\times D_0)$ permet de caractériser les demi-groupes réguliers 0-bisimples de la façon suivante :

COROLLAIRE 2.11. – *Soit D un demi-groupe régulier avec zéro, non réduit à zéro, et soit $(\rho^0_{\mathcal{R}}, \lambda^0_{\mathcal{L}})$ la restriction de sa représentation canonique à $D_0=D-(0)$. D est 0-bisimple si et seulement si $(\rho^0_{\mathcal{R}}, \lambda^0_{\mathcal{L}})$ est une représentation bitransitive.*

Cela résulte immédiatement de la définition des demi-groupes 0-bisimples (une seule $\mathcal{D}$-classe de GREEN autre que 0). On en déduit que tout demi-groupe régulier 0-bisimple est isomorphe à un demi-groupe (régulier) restreint de couples de matrices monomiales (cf. proposition 1.28).

3. – Demi-groupes réguliers produits sous-directs de demi-groupes complètement 0-simples.

Le corollaire 2.6 du paragraphe précédent met en évidence deux types de problèmes sur les demi-groupes réguliers :

1) Structure de demi-groupes réguliers bitransitifs, ou transitifs d'un côté ;

2) Structure de produits sous-directs de demi-groupes réguliers bitransitifs.

En ce qui concerne 1), un objectif immédiat paraît être la structure des demi-groupes réguliers 0-bisimples (cf. corollaire 2.11). Ce problème n'est pas abordé dans ce travail. A propos de 2), il n'est pas évident à priori que tout demi-groupe régulier (satisfaisant éventuellement des conditions de finitude) ne soit pas produit sous-direct de demi-groupes réguliers 0-bisimples. L'exemple suivant prouve le contraire. Soit D la bande dont la table est la suivante :

	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	a	a
c	a	a	c	c	c	c
d	a	a	c	d	c	f
e	a	a	e	e	e	e
f	a	a	f	f	f	f

a) Soit $L=\{c, e, f\}$ une $\mathcal{L}$-classe de D. Les translations partielles à gauche associées $\lambda_L(x)$ sont: $\lambda_L(a)=0$; $\lambda_L(b)=0$; (0 représente la transformation vide)

$$\lambda_L(c)=\begin{pmatrix} c & e & f \\ c & c & c \end{pmatrix}; \quad \lambda_L(d)=\begin{pmatrix} c & e & f \\ c & c & f \end{pmatrix};$$

$$\lambda_L(e)=\begin{pmatrix} c & e & f \\ e & e & e \end{pmatrix}; \quad \lambda_L(f)=\begin{pmatrix} c & e & f \\ f & f & f \end{pmatrix}.$$

Dans le demi-groupe quotient de D par le noyau de λ_L (c'est le quotient de REES $D/(a, b)$ de D par l'idéal bilatère (a, b)) la représentation λ_L est une

représentation fidèle et transitive. Or les $\mathfrak{D}$–classes de GREEN de $D/(a, b)$ sont $\{\bar{a}\}$, $\{c, e, f\}$, $\{d\}$. Ceci nous donne un exemple de demi–groupe régulier transitif à gauche et non 0–bisimple.

b) Par ailleurs D n'est pas produit sous–direct de demi–groupe réguliers 0–simples (c'est–à–dire ici complètement 0–simples puisqu'il s'agit d'un demi–groupe fini). En effet, les congruences ρ_i telles que D/ρ_i soit complètement 0–simple sont: ρ_1 de classes $\{a, b, c, e, f\}$, $\{d\}$; ρ_2 de classes $\{a, d, c, e, f\}$, $\{b\}$; ρ_3 de classes $\{a, b\}$, $\{c, d, f\}$, $\{e\}$ et ρ_4 de classes $\{a, b\}$, $\{c, d, e, f\}$ [17]. Le congruence intersection des ρ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ a pour classes $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c, f\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, ce qui prouve que D n'est pas produit sous–direct de demi–groupes complètement 0–simples.

Dans l'optique de 2) ci–dessus, nous étudions maintenant les demi–groupes réguliers produits sous–directs de demi–groupes complètement 0–simples.

Soit D un demi–groupe et soit $J(a) = D^1aD^1$ l'idéal bilatère engendré par $a \in D$. On note $I(a)$ l'ensemble des éléments de $J(a)$ qui ne sont pas générateurs de $J(a)$. Ou bien $I(a)$ est vide, ou bien $I(a)$ est un idéal bilatère de D, donc aussi de $J(a)$. Le quotient de REES $J(a)/I(a)$ est appelé un facteur principal de D. En général, c'est un demi–groupe simple, 0–simple ou de carré nul. Lorsque D est régulier, tout facteur principal est 0–simple, ou simple (autrement dit D est semi–simple). Parmi les demi–groupes réguliers, ceux dont les facteurs principaux sont tous complètement 0–simples ou complètement simples, sont dits complètement semi–simples [10]. Des exemples de tels demi–groupes sont les demi–groupes réguliers compacts, le demi–groupe multipticatif des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, etc...

Soit $D[D']$ un demi–groupe avec zéro noté $0[0']$. Une application φ de $D - (0)$ dans $D' - (0')$ est appelée un homomorphisme partiel de $D - (0)$ dans $D - (0')$ si et seulement si pour tout $a, b \in D$: $ab \neq 0 \Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(b) \neq 0'$ et $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab)$. Lorsque D et D' sont des demi–groupes complètement 0–simples pris sous forme matricielle, le théorème 3.14 de [2], donne tous les homomorphismes partiels de $D - (0)$ dans $D' - (0')$.

Le théorème général concernant les demi–groupes réguliers produits sous–directs de demi–groupes complètement 0–simples est le suivant (nous notons J_x la $\mathfrak{J}$–classe de GREEN de x):

THÉORÈME 2.12. – *Un demi–groupe régulier est produit sous–direct de demi–groupes complètement 0–simples si et seulement si*:

1) *D est complètement semi–simple*;

---

[17] Ces congruences ont été obtenues en déterminant les idéaux matriciels de D et les décompositions matricielles correspondantes (cf. théorème 4.15). Notons que D est de radical matriciel (intersection des idéaux matriciels [6']) nul.

2) *pour tout* a, $b \in D$ *tels que* $J(b) \subseteq J(a)$, *ou bien pour tout* $x \in J(a) \setminus I(a)$ $(= J_a)$, $xJ(b)x \subseteq I(b)$, *ou bien il existe un homomorphisme partiel* φ *de* $J(a) \setminus I(a)$ $(= J_a)$ *dans* $J(b) \setminus I(b)$ $(= J_b)$ *vérifiant la condition*:

$$(C) \quad \forall x \in J_a, \ \forall y \in J_b : xy \in J_b \ [\text{resp. } yx \in J_b] \Rightarrow xy = \varphi(x)y \ [\text{resp } yx = y\varphi(x)].$$

La démonstration repose sur 4 lemmes (2.13 à 2.16).

LEMME 2.13. – *Un demi–groupe régulier* D *est produit sous–direct de demi–groupes complètement* 0*–simples si et seulement si*:

a) pour toute $\mathcal{R}$*–classe* R *et pour tout* $x \in D$, $Rx \cap R$ *est vide ou est contenu dans une* $\mathcal{H}$*–classe*;

b) pour toute $\mathcal{L}$*–classe* L *et pour tout* $x \in D$, $xL \cap L$ *est vide ou est contenu dans une* $\mathcal{H}$*–classe.*

(Signalons au passage que pour un demi–groupe inverse a) et b) sont équivalents; celà résulte du fait que $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (a^{-1}, b^{-1}) \in \mathcal{L}$).

DÉMONSTRATION. – 1) Supposons que D soit produit sous–direct de demi–groupes complètement 0–simples D_i. D est isomorphe a un sous–demi–groupe S du produit cartésien $\prod_{i \in I} D_i$, tel que chaque $x_i \in D_i$ apparaisse comme i^e composante d'un élément au moins de S (cf. [1], p. 91). Pour $a, b \in S$, $(a, b) \in \mathcal{R}$ si et seulement si $a = (a_i) = (b_i)(u_i)$ et $b = (b_i) = (a_i)(v_i)$ pour certains éléments (u_i) et $(v_i) \in S$ (cela résulte du fait que D, donc S, est régulier). Il en résulte que $(a, b) \in \mathcal{R}$ si et seulement si ou bien a_i et b_i sont nuls en même temps, ou bien $(a_i, b_i) \in \mathcal{R}$ dans D_i: en effet, $(a, b) \in \mathcal{R}$ implique $(a_i, b_i) \in \mathcal{R}$ d'après ce qui précède; inversement si $a = (a_i)$ et $b = (b_i)$ sont tels que pour tout $i \in I$, $(a_i, b_i) \in \mathcal{R}$ dans D_i on a $a_i = b_i b'_i a_i$ et $b_i = a_i a'_i b_i$, en prenant a'_i et b'_i de façon que (a'_i) et (b'_i) soient inverses de a_i et b_i dans S; d'où $(a, b) \in \mathcal{R}$ [18].

Supposons $Rx \cap R \neq \emptyset$ pour une $\mathcal{R}$–classe R de S. Pour $a = (a_i) \in R$ on a $(a_i x_i, a_i) \in \mathcal{R}$ dans D_i. Soit $z \in Rx \cap R$; $z = bx = (b_i)(x_i)$ avec $(b_i) \in R$. On a: $a_i x_i = 0 \Leftrightarrow b_i x_i = 0$, et dans le cas où a_i et b_i sont non nuls $a_i x_i \neq 0$, $b_i x_i \neq 0$ et $(a_i, b_i) \in \mathcal{R}$ (dans D_i) implique alors $(a_i x_i, b_i x_i) \in \mathcal{H}$ (dans D_i). Il en résulte $(ax, bx) \in \mathcal{H}$, ce qui prouve que $Rx \cap R$ est dans une même $\mathcal{H}$–classe. On démontrerait de même $xL \cap L = \emptyset$ ou $xL \cap L$ est contenu dans une $\mathcal{H}$–classe.

2) Supposons a) et b) vérifiées. Soit ρ_R le noyau de la représentation P_R de D par des translations partielles définies à l'aide de la relation $R \times R$ et soit ρ_L le noyau de l'anti–représentation Q_L. Nous montrerons que D/ρ_R est complètement 0–simple; symétriquement D/ρ_L est aussi complètement 0–simple; d'après la proposition 2.3. d) et le corollaire 2.6, cela suffira pour

[18] Symétriquement $(a, b) \in \mathcal{L}$ dans S, si et seulement si a_i et b_i sont nuls en même temps ou $(a_i, b_i) \in \mathcal{L}$ dans D_i.

montrer que D est produit sous direct de demi-groupes complètement 0-simples.

Tout d'abord D/ρ_R est régulier. Montrons que le zéro de D/ρ_R est premier (nous supposons que ce zéro existe; dans le cas contraire un demi-groupe complètement simple apparaît comme composant du produit sous-direct). La classe zéro de ρ_R est $W = \{x \in D : P_R(x) = \emptyset\} = \{x ;\ x \in D : Rx \cap R = \emptyset\}$. Si $x \notin W$ et $y \notin W$, il existe a, b, c, $d \in R$ tels que $ax = b$ et $cy = d$. Comme $(b, d) \in \mathcal{R}$, $d = bb'd = axb'cy$. Il en résulte $xb'cy \notin W$ et $xDy \notin W$. Montrons maintenant que dans D/ρ_R tout idempotent est primitif. Soient $\bar{e}$, $\bar{f}$, deux idempotents non nuls de D/ρ_R tels que $\bar{e}\bar{f} = \bar{f}\bar{e} = \bar{e} \neq 0$. D'après la proposition 3.5 (chapitre III), il existe des idempotents e, f de D tels que $e \in \bar{e}$, $f \in \bar{f}$ avec $ef \equiv fe \equiv e$ (mod. ρ_R). De plus $e \notin W$ et il existe a_0, $b_0 \in R$ tels que $a_0 e = b_0$. Nous montrerons que pour tout a, $b \in R$: $ae = b \Leftrightarrow af = b$.

Supposons $ae = b$ avec a et $b \in R$. Soit b'' un inverse de b; posons $b' = eb''$. On a $bb'b = beb''b = bb''b = b$ (car $be = b$) et $b'bb' = eb''beb'' = eb''bb'' = eb'' = b'$. D'un autre côté: $b'ae = b'b$. Mais $b'a$ et $b'b \in R$ où R' est une $\mathcal{R}$-classe située dans la même $\mathcal{D}$-classe que R. Comme $(e, ef) \in \rho_R$, de $(b'a, b'b) \in P_{R'}(e)$ résulte $b'aef = b'b$ et $b'afe = b'b$. De la dernière égalité on déduit $b'b \in b'afD$ et comme $b'af \in b'D = b'bD$ on obtient $b'af\mathcal{R}b'a\mathcal{R}b'b = b'ae$. D'après l'hypothèse faite sur les $\mathcal{R}$-classes $R'f \cap R' \neq \emptyset$ implique $R'f \cap R'$ est dans une $\mathcal{H}$-classe; en particulier, $b'aef = b'b \in R'f \cap R'$. Il en résulte $(b'af, b'b) \in \mathcal{H}$. Par ailleurs $b'af \cdot b'af = b'afeb'af = b'af$ (car $b'afe = b'b$). Chaque $\mathcal{H}$-classe ne contenant qu'un seul idempotent, il vient $b'af = b'b$ d'où $bb'af = b$ et comme $bb'a = a$ on obtient finalement $af = b$.

Supposons $af = b$ avec a et $b \in R$. On sait qu'il existe a_0, $b_0 \in R$ tels que $a_0 e = b_0$; d'après ce qui précède $a_0 f = b_0$. L'hypothèse faite sur les $\mathcal{R}$-classes entraîne alors $(b, b_0) \in \mathcal{H}$ et en particulier $b = bb'_0 b_0$; il vient $be = b$ donc $afe = be = b$. Puisque $(e, fe) \in \rho_R$, il en résulte $ae = b$.

En conclusion, D/ρ_R est régulier avec un zéro premier et tous ses idempotents sont primitifs: il est complètement 0-simple.

REMARQUE. – On peut réduire les hypothèses du lemme 2.13 en supposant que *a*) et *b*) sont vérifiées pour une seule $\mathcal{R}$-classe et une seule $\mathcal{L}$-classe dans chaque $\mathcal{D}$-classe (cf. théorème 1.21).

LEMME 2.14. – *Un demi-groupe régulier D, produit sous-direct de demi-groupes 0-simples est complètement semi-simple.*

DÉMONSTRATION. – Il suffit d'établir qu'un idempotent non nul au moins, dans chaque facteur principal est primitif. Comme pour le lemme 2.13, 1), D est isomorphe a un sous-demi-groupe S de ΠD_i où chaque D_i est complètement 0-simple. Si deux éléments $a = (a_i)$ et $b = (b_j)$ de S sont $\mathcal{J}$-équivalents: $(a_i) = (u_i)(b_i)(v_i)$ et $(b_i) = (r_i)(a_i)(s_i)$. Donc $a_i = 0 \Leftrightarrow b_i = 0$. Les idempotents de S sont les éléments (a_i) avec $a_i^2 = a_i$; d'où $a_i = e_i$ ou 0 (dans D_i).

Soient e et f deux idempotents non nuls d'un facteur principal, tels que $ef = fe = e$. Si $e = (e_i)$ et $f = (f_i)$ on a : $e_i = 0 \Leftrightarrow f_i = 0$ et pour e_i, f_i non nuls $e_i f_i = f_i e_i = e_i \neq 0$ d'où $e_i = f_i$ car e_i est primitif dans D_i. Il en résulte $e = f$.

LEMME 2.15. – *Soit D un demi-groupe complètement semi-simple produit sous-direct de demi-groupes complètement 0-simples et soient a, $b \in D$ tels que $J(b) \subseteq J(a)$. Alors, ou bien pour tout $x \in J_a$, $xJ(b)x \subseteq I(b)$, ou bien il existe un homomorphisme partiel de J_a dans J_b vérifiant la condition (C) du théorème* 2.12.

DÉMONSTRATION. – 1) Soit $X = \{x;\ x \in J_a : xJ(b)x \subseteq I\}$. Supposons $X \neq 0$; dans ce cas $I(a) \subset X \cup I(a) \subseteq J(a)$. Par ailleurs, $X \cup I(a)$ est un idéal bilatère de D: en effet $[X \cup I(a)]D \subseteq XD \cup I(a)D$; si $x \in X$ et $y \in D$ alors $xy \in J(a)$: ou bien $xy \in I(a)$ ou bien $xy \notin I(a)$ et dans ce cas $xyJ(b)xy \subseteq xJ(b)xy \subseteq I(b)$ et $xy \in X$; donc $XD \subseteq X \cup I(a)$ et $[X \cup I(a)]D \subseteq X \cup I(a)$; on démontre de la même façon que $X \cup I(a)$ est un idéal à gauche. Comme $I(a)$ est maximal dans $J(a)$: $X \cup I(a) = J(a)$ d'où $X = J_a$.

2) Supposons $X = \emptyset$. Nous définirons alors un homomorphisme partiel de J_a dans J_b en plusieurs étapes (Les notations relatives à chaque partie sont indépendantes).

a) Montrons que pour tout idempotent $e \in J_a$, $eJ(b)e \setminus I(b)$ est contenu dans une $\mathcal{H}$-classe groupe. Les éléments de $J(b)/I(b)$ qui est complètement 0-simple, sont notés par des triplets répresentant les éléments d'un demi-groupe de matrices de REES associé. Soit $ece \notin I(b)$ avec $c \in J(b)$. En posant $c = (g;\ i,\ \lambda)$, on a : $ce = (u;\ i,\ \lambda_0) \in R_i \cap R_i e$. Pour tout $x \in J(b)$ tel que $exe \notin I(b)$, en posant $x = (k;\ j,\ \mu)$ il vient: $(k;\ j,\ \mu)e = (v;\ j,\ \lambda'_0)$. En prenant ν tel que $p_{\nu j} \neq 0$: $(z;\ i,\ \nu)\ (k;\ j,\ \mu)e = (z;\ i,\ \nu)\ (v;\ j,\ \lambda'_0)$ soit $(zp_{\nu j}k;\ i,\ \mu)e = (zp_{\nu j}v;\ i,\ \lambda'_0) \in R_i e \cap R_i$. D'après le lemme 2.13, $(zp_{\nu j}v;\ i,\ \lambda'_0)$ et $(u;\ i,\ \lambda_0)$ sont dans la même $\mathcal{H}$-classe d'où $\lambda_0 = \lambda'_0$. Donc $xe = (v;\ j,\ \lambda_0)$. De même $ece = e(u;\ i,\ \lambda_0) = (w;\ i_0,\ \lambda_0) \in eL_{\lambda_0} \cap L_{\lambda_0}$ et $e(v;\ j,\ \lambda_0) = (t;\ i'_0,\ \lambda_0) \in eL_{\lambda_0} \cap L_{\lambda_0}$ impliquent $i_0 = i'_0$. Donc $exe \in H_{i_0\lambda_0}$. Montrons que $H_{i_0\lambda_0}$ est une $\mathcal{H}$-classe groupe: $ece = d$ implique $ed = de = d \in J_b$; il existe $d' \in J_b$ tel que $d = dd'd = ded'ed \notin I(b)$; or $ed'e \notin I(b)$ implique $ed'e = (r;\ i_0.\ \lambda_0)$ et

$$d = ded'ed = (w;\ i_0,\ \lambda_0)\,(r;\ i_0,\ \lambda_0)(w;\ i_0,\ \lambda_0) \in I(b)$$

implique $p_{\lambda_0 i_0} \neq 0$, ce qui prouve $H_{i_0\lambda_0}$ est une $\mathcal{H}$-classe groupe. Remarquons que $e(p^{-1}_{\lambda_0 i_0};\ i_0,\ \lambda_0)e = (p^{-1}_{\lambda_0 i_0};\ i_0,\ \lambda_0)$: on a en effet $ece \in H_{i_0\lambda_0}$ et il existe $(ece)^{-1} \in H_{i_0\lambda_0}$ tel que $(ece)\ (ece)^{-1}(ece) = (p^{-1}_{\lambda_0 i_0};\ i_0,\ \lambda_0)$ d'où $e(p^{-1}_{\lambda_0 i_0};\ i_0,\ \lambda_0)e = (p^{-1}_{\lambda_0 i_0};\ i_0,\ \lambda_0)$.

Pour tout idempotent $e \in J_a$ on pose $\varphi(e) =$ l'idempotent de la $\mathcal{H}$-classe groupe contenant $eJ(b)e \setminus I(b)$.

b) Soit $x \in J_a$ et soient e, f des idempotents de J_a tels que $ex = fx = x$. Montrons que $\varphi(e)x = \varphi(f)x$. Notons d'abord que $\varphi(e)x \notin I(b)$, car $ex = x \notin I(a)$

implique $(e, x) \in \mathcal{R}$; il existe alors $x' \in J_a$ tel que $xx' = e$ et $\varphi(e)x \in I(b)$ entraînerait $\varphi(e)e \in I(b)$, ce qui n'est pas. Posons $\varphi(e) = (p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$ et $\varphi(f) = (p_{\mu j}^{-1}; j, \mu)$ et montrons que $i = j$. D'après la partie *a*), $e(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)e = (p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$. Comme $(e, f) \in \mathcal{R}$, on a en particulier $e = fe$, d'où $fe(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda) = f(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda) = e(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda) = (p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$. Par ailleurs $f(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)f \notin I(b)$ car $fe(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)fe = f(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)fe = (p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda) \notin I(b)$. D'après *a*) il en résulte $f(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)f = (p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)f = (s; i, \mu)$ et $\varphi(f) = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)$.

Donc $\varphi(e)x = (u; i, \lambda_0)$ et $\varphi(f)x = (v; i, \lambda_0)$ (dans les deux cas il s'agit du même indice λ_0 d'après le lemme 2.13). Enfin $(p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)e = (t; i, \lambda) \notin I(b)$ (sinon $(p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)ef = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)f = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu) \in I(b)$ ce qui na pas lieu) et: $(p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)e(p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)e = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)e[f(p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)e] = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)f(p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)e = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)e$.

On en déduit $(p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)e = (p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$. D'après la remarque du début de *b*) on a: $(e, x) \in \mathcal{R}$, d'où pour $x' \in J_a$, $xx' = e$ et $xx'x = x$. Il en résulte $\varphi(e)xx' = \varphi(f)xx'$ d'où $\varphi(e)x = \varphi(f)x$.

c) Soit $x \in J_a$ et soient e, f des idempotents de J_a tel que $ex = x = xf$. Montrons que $\varphi(e)x = x\varphi(f)$. D'après *b*), en posant $\varphi(e) = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)$ et $\varphi(f) = (p_{\lambda j}^{-1}; j, \lambda)$, on obtient $\varphi(e)x = (r; i, \lambda)$ et $x\varphi(f) = (s; i, \lambda)$. Il en résulte: $[\varphi(e)x]\varphi(f) = (r; i, \lambda)(p_{\lambda j}^{-1}; j, \lambda) = (r; i, \lambda)$ d'une part et

$$\varphi(e)[x\varphi(f)] = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)(s; i, \lambda) = (s; i, \lambda)$$

d'autre part. D'où $r = s$ et $\varphi(e)x = x\varphi(f)$.

d) A tout $x \in J_a$ on associe $\varphi(x) = \varphi(e)\ x \in J_b$, en choisissant un idempotent $e \in J_a$ tel que $ex = x$. D'après *b*), $x \to \varphi(x)$ définit bien une application de J_a dans J_b ($\varphi(x)$ ne dépend pas du choix de e). Cette application est un homomorphisme partiel. En effet, soient x, $y \in J_a$ tels que $xy \notin I(a)$. Pour des idempotents e, $f \in J_a$ tels que $ex = x$ et $yf = y$ on a $exy = xy = xyf$. D'après *c*) et la définition de φ on a:

$$\varphi(xy) = \varphi(e)xy = xy\varphi(f) = \varphi(e)xy\varphi(f) = [\varphi(e)x][y\varphi(f)] = \varphi(x)\varphi(y).$$

e) Soient $x \in J_a$, $y \in J_b$ tels que $xy \notin I(b)$. En posant $y = (v; k, \nu)$ on obtient $xy = (u; i, \nu)$. En désignant par e un idempotent de J_a tel que $ex = x$, $exy = xy = (u; i, \nu)$. D'après la partie *a*), $\varphi(e) = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)$. Il en résulte:

$$\varphi(x)y = [\varphi(e)x]u = \varphi(e)xy = (p_{\mu i}^{-1}; i, \mu)(u; i, \nu) = (u; i, \nu) = xy.$$

De même, si $yx \notin I(b)$, $y\varphi(x) = yx$, ce qui montre que la condition (C) est vérifiée.

REMARQUE. – Les homomorphismes partiels mis en évidence possèdent des propriétés de composition qui ne s'explicitent commodément que lorsque les $\mathfrak{J}$–classes de GREEN peuvent s'ordonner de façon simple (cf. les cas particuliers envisagés dans la suite). Ces homomorpismes sont étroitement liés à l'opération du demi–groupe. Par exemple: $x \in J_a$, $y \in J_b$, $xy \in J_c \Rightarrow xy = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ où φ_1 est un homomorphisme partiel de J_a dans J_c et φ_2 un homomorphisme partiel de J_b dans J_c (φ_1 ou φ_2 est l'identité si $(a, c) \in \mathfrak{J}$ ou $(b, c) \in \mathfrak{J}$).

LEMME 2.16. – *Soit D un demi–groupe complètement semi–simple. Supposons que pour tout a, $b \in D$ tels que $J_b \subseteq J_a$, ou bien pour tout $x \in J_a$, $xJ(b)x \subseteq I(b)$, ou bien il existe une application φ de J_a dans J_b vérifiant la condition (C). Alors D est produit sous–direct de demi–groupes complètement 0–simples.*

DÉMONSTRATION. – Montrons que pour toute $\mathfrak{R}$–classe R de D et pour tout $x \in D$, $Rx \cap R = \emptyset$ ou est contenu dans une $\mathfrak{H}$–classe. Un résultat analogue vaudra pour les $\mathfrak{L}$–classe et le lemme résultera du lemme 2.13. Supposons $Rx \cap R \neq \emptyset$. Il existe a, $b \in R$ tels que $ax = b$ et $J(b) \subseteq J(x)$. Si $J(b) = J(x)$, tout élément de R est un générateur de $J(x)$ donc $R \subseteq J_x$. Comme $J(x)/I(x)$ est complètement 0–simple $Rx \cap R$ est dans une $\mathfrak{H}$–classe, en l'occurence H_b. Si $J(b) \subset J(x)$, soit b' un inverse de b ($b' \in J_b$) : $axb'ax = bb'b = b \notin I(b)$ donc $xb'ax \notin I(b)$. Comme $b'a \in J_b$, il en résulte $xJ(b)x \subsetneq I(b)$. Il existe alors, une application φ de $J(x)$ dans $J(b)$ vérifiant la condition (C). Supposons que $cx = d$ avec c, $d \in R$. D'une part $ax = a\varphi(x) = b$ et d'autre part $cx = c\varphi(x) = d$. Ceci implique $(b, d) \in \mathfrak{H}$ (propriété du demi–groupe complètement 0–simple $J(b)/I(b)$).

Il est à noter que, d'après le lemme précédent, on peut remplacer dans le théorème 2.12 les mots «homomorphisme partiel» par «application». L'intérêt du fait que cette application soit aussi un homorphisme partiel est évident lorsqu'on envisage des théorèmes de structure. Le théorème suivant donne une caractérisation des demi–groupes considérés portant sur des propriétés des idempotents relativement à leur relation d'ordre habituel: $e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e$.

THÉORÈME 2.17. – *Un demi–groupe D régulier est produit sous–direct de demi–groupes complètement 0–simples si et seulement si:*

1) *D est complètement semi–simple;*

2) *pour tout a, $b \in D$ tels que $J(b) \subseteq J(a)$, ou bien aucun idempotent de J_a n'est supérieur à un idempotent de J_b, ou bien chaque idempotent de J_a est supérieur à un seul idempotent de J_b.*

DÉMONSTRATION. – *a*) Supposons que D soit produit sous–direct de demi–groupes complètement 0–simples. Alors 1) est vérifié (théorème 2.12). Soient a, $b \in D$ tels que $J(b) \subset J(a)$. D'après le théorème 2.12, deux cas sont possibles:

i) pour tout $x \in J_a$, $xJ_bx \subseteq I(b)$; s'il existait deux idempotents $e \in J_a$ et $f \in J_b$ tels que $f < e$ on aurait $fe = ef = f$ d'où $efe = fe = f \notin I(b)$; c'est en contradiction avec $eJ_be \subseteq I(b)$.

ii) il existe un homomorphisme partiel φ de J_a dans J_b; d'après la démonstration du lemme 2.15, 2), *a*), pour tout idempotent $e \in J_a$, $eJ_be \setminus I(b)$ est contenu dans une $\mathcal{H}$–classe groupe d'élément unité $f = \varphi(e)$. On a vu que $efe = f$ d'où $f < e$. S'il existe un idempotent $f' \in J_b$ tel que $f' < e$, $ef'e = f'$ est dans la même $\mathcal{H}$–classe que f, d'où $f = f'$.

b) Réciproquement, soit D un demi–groupe vérifiant 1) et 2). Soient a, $b \in D$ tels que $J(b) \subset J(a)$. Supposons que pour tout idempotent $e \in J_a$ et tout idempotent $f \in J_b$, $f \not< e$. Alors pour tout $x \in J_a$, $xJ_bx \subseteq I(b)$: en effet, supposons qu'il existe $x \in J_a$ tel que $xcx \in J_b$ avec $c \in J_b$. En posant $y = xcx$ on obtient $y'xcx = y'y = g$ (y' est un inverse de y). D'où $y'yx'x = y'y$. Avec $x'x = e$, eg est un idempotent $f \in J_b$ et $f = eg \notin I(b)$ (sinon $geg = g \in I(b)$ et $y \in I(b)$, ce qui n'est pas). On a: $fe = ege = eg = f$, $ef = eeg = eg = f$ d'où $f < e$; c'est en contradiction avec l'hypothèse.

Supposons que pour tout idempotent $e \in J_a$ il existe un seul idempotent $f \in J_b$ tel que $f < e$. Posons $\varphi(e) = f$ et pour $x \in J_a$ tel que $ex = x$, posons $\varphi(x) = \varphi(e)x$; si $e_1x = ex = x$, on a $e_1e = e$ et $ee_1 = e_1$; en désignant par f_1 l'idempotent de J_b tel que $f_1 < e_1$, il vient: $ee_1f_1 = e_1f_1 = f_1$ d'où $ef_1 = f_1$; l'élément f_1e est un idempotent de J_b tel que $f_1e < e$, donc $f_1e = f$; dans ces conditions $e_1x = ex$ implique $f_1e_1x = f_1ex$, soit $f_1x = fx$, ce qui prouve que la définition de $\varphi(x)$ est indépendante du choix de e tel que $ex = x$. Maintenant si $ex = x = xe_2$ (e et e_2 sont des idempotents de J_a), montrons que $fx = xf_2 = fxf_2$ où $f = \varphi(e)$ et $f_2 = \varphi(e_2)$. D'abord $xf_2 \in J_b$ et il existe un idempotent $g \in J_b$ tel que $gxf_2 = xf_2$. On a: $exe_2 = x$, d'où $exf_2 = xf_2 = egxf_2 = egexf_2$. Comme $egxf_2 = xf_2$, eg est un idempotent de J_b donc aussi ege et comme $ege < e$ on obtient $ege = f$. Il en résulte $xf_2 = fxf_2$. On démontre de même $fx = fxf_2$. En terminant la démonstration comme en *c*) et *d*) de la démonstration du lemme 2.15, on montre que $x \to \varphi(x)$ définit un homomorphisme partiel de J_a dans J_b, vérifiant la condition (C) du théorème 2.12.

D'après le théorème 2.12, il en résulte que D est produit sous–direct de demi–groupes complètement 0–simples.

4. – Cas particuliers de demi–groupes réguliers produits sous–directs de demi–groupes complètement 0–simples.

Nous étudions dans ce paragraphe deux types particuliers de demi–groupes complètement semi–simples satisfaisant aux conditions indiquées dans les théorèmes 2.12 et 2.17: les demi–groupes réunion de groupes et les demi–groupes complètement semi–simples ayant une série principale. Dans les deux

cas, les facteurs principaux sont liés par l'existence d'une structure ordonnée sous-jacente: dans le premier cas c'est une structure assez générale (demi-treillis) mais les conditions sur les $\mathfrak{J}$-classes sont fortes (chaque $\mathfrak{J}$-classe est un sous-demi-groupe complètement simple); dans le second cas au contraire la structure ordonnée sous-jacente est plus particulière et les $\mathfrak{J}$-classes sont du type le plus général.

A propos des demi-groupes réunion de groupes rappelons le théorème suivant:

THÉORÈME 2.18 ([2], th. 4.5, p 126). - *Pour un demi-groupe D, il y a équivalence entre*:

a) D est réunion de groupes;

b) D est réunion de demi-groupes complètement simples;

c) D est un demi-treillis Y de demi-groupes complètement simples $S_\alpha(\alpha \in Y)$, où Y est le demi-treillis des idéaux principaux de D et chaque S_α est une $\mathfrak{J}$-classe.

Dans la suite l'opération et la relation d'ordre du demi-treillis intervenant dans ce théorème sont supposés être liées par $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\beta = \beta$.

Rappelons aussi que l'enveloppe des translations $\bar{D}$ d'un demi-groupe D est l'ensemble des couples (ρ, λ) d'applications de D dans D (partout définies), telles que pour tout x, $y \in D$: $x(y\rho) = (xy)\rho$, $(x\lambda)y = (xy)\lambda$, $x(y\lambda) = (x\rho)y$, munis de l'opération $(\rho_1, \lambda_1)(\rho_2, \lambda_2) = (\rho_1\rho_2, \lambda_2\lambda_1)$. La représentation complète de D par des translations internes à droite et à gauche définit un homomorphisme de D dans l'enveloppe des translations $\bar{D}$; c'est un isomorphisme si et seulement si D est faiblement réductif; c'est le cas lorsque D est complètement simple (D est faiblement simplifiable · voir chapitre IV). Le théorème suivant généralise le théorème de CLIFFORD sur les demi-treillis de groupes ([2], théorème 4.11). Il ne donne pas la structure effective des demi-groupes réunion de groupes, mais ramène ce problème à l'étude de certaines applications d'un demi-groupe complètement simple dans l'enveloppe des translations d'un autre:

THÉORÈME 2.19. - *Soit Y un demi-treillis. A chaque $\alpha \in Y$ on fait correspondre un demi-groupe complètement simple S_α de sorte que $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$. A chaque couple $(\alpha, \beta) \in Y \times Y$ tel que $\alpha \geq \beta$ on fait correspondre une application $\Phi_{\alpha,\beta}$ de S_α dans l'enveloppe des translations $\bar{S}_\beta$ de S_β, les applications $\Phi_{\alpha,\beta}$ étant liées par* ([19])

1) $S_\alpha\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \cdot S_\beta\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq S_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta}$ *pour tout* $\alpha, \beta \in Y$;

([19]) Dans tout ce paragraphe 4, où il est question de propriétés de composition d'applications, nous notons les applications $\Phi_{\alpha\beta}$ de S_α dans $\bar{S}_\beta$ comme des opérateurs à droite sur S_α.

2) *pour tout* α, β, $\gamma \in Y$ *tels que* $\alpha\beta > \gamma$ *et pour tout* $a_\alpha \in S_\alpha$ *et* $b_\beta \in S_\beta$:

$$[a_\alpha \Phi_{\alpha,\alpha\beta} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\alpha\beta}] \Phi_{\alpha\beta,\gamma} = a_\alpha \Phi_{\alpha,\gamma} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\gamma} ;$$

3) $\Phi_{\alpha,\alpha}$ *est l'injection canonique de* S_α *dans* S_α.

Sur $D = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ *on définit une opération par* $a_\alpha \cdot b_\beta = a_\alpha \Phi_{\alpha,\alpha\beta} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\alpha\beta}$ [*Op.*]. *Alors* D *est un demi-groupe réunion de groupes. Réciproquement, tout demi-groupe réunion de groupes peut s'obtenir de cette façon.*

DÉMONSTRATION. - Supposons que $D = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ soit muni de l'opération [Op.] avec les conditions 1), 2), 3). Si on montre que D est un demi-groupe, D est alors réunion de demi-groupes complètement simples et d'après le théorème 2.18, il est réunion de groupes. Avec des notations évidentes :

$$(a_\alpha b_\beta) c_\gamma = [a_\alpha \Phi_{\alpha,\alpha\beta} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\alpha\beta}] \cdot c_\gamma = (a_\alpha \Phi_{\alpha,\alpha\beta} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\alpha\beta}) \Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} \cdot c_\gamma \Phi_{\alpha\beta\gamma}$$

(pour écrire la dernière égalité on utilise 1) et 2)). Comme $\alpha\beta \geq \alpha\beta\gamma$, d'après 2), $(a_\alpha b_\beta) c_\gamma = a_\alpha \Phi_{\alpha,\alpha\beta\gamma} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\alpha\beta\gamma} \cdot c_\gamma \Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$. On démontre de la même façon (en utilisant cette fois $\beta\gamma \geq \alpha\beta\gamma$) que $a_\alpha (b_\beta c_\gamma)$ est égal à la quantité à droite dans l'égalité précédente.

Réciproquement, soit D un demi-groupe réunion de groupes. D est un demi-treillis de demi-groupes complètement simples S_α où chaque S_α est une $\mathfrak{J}$-classe. Si $\alpha \geq \beta$, $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha \subseteq S_\beta$. L'application $a_\alpha \to (\rho_{a_\alpha}, \lambda_{a_\alpha})$ de S_α dans $\overline{S}_\beta$ est un homomorphisme (ρ_{a_α} [resp. λ_{a_α}] est la translation à droite [resp. à gauche] définie sur S_β par $x_\beta \to x_\beta a_\alpha$ [resp. $x_\beta \to a_\alpha x_\beta$] pour tout $x_\beta \in S_\beta$). On désigne cet homomorphisme par $\Phi_{\alpha,\beta}$. Pour $x \in S_\gamma$ et $y \in S_\delta$, $xy \in S_{\gamma\delta}$ et $x\Phi_{\gamma,\gamma\delta} = (\rho_x, \lambda_x) \in \overline{S}_{\gamma\delta}$ et $y\Phi_{\delta,\gamma\delta} = (\rho_y, \lambda_y) \in \overline{S}_{\gamma\delta}$. Il en résulte : $x\Phi_{\gamma,\gamma\delta} \cdot y\Phi_{\gamma,\gamma\delta} = (\rho_{xy}, \lambda_{xy}) \in \overline{S}_{\gamma\delta}$. Comme $xy \in S_{\gamma\delta}$, en identifiant la partie interne de $\overline{S}_{\gamma\delta}$ à $S_{\gamma\delta}$ on obtient : $x\Phi_{\gamma,\gamma\delta} \cdot y\Phi_{\delta,\gamma\delta} \in S_{\gamma\delta}$. De même :

$$[a_\alpha \Phi_{\alpha,\alpha\beta} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\alpha\beta}] \Phi_{\alpha\beta,\gamma} = (\rho_{a_\alpha b_\beta}, \lambda_{a_\alpha b_\beta}) = (\rho_{a_\alpha}, \lambda_{a_\alpha})(\rho_{b_\beta}, \lambda_{b_\beta}) \in \overline{S}_\gamma$$
$$= a_\alpha \Phi_{\alpha,\gamma} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\gamma},$$

avec :

$$a_\alpha \Phi_{\alpha,\alpha\beta} \cdot b_\beta \Phi_{\beta,\alpha\beta} = (\rho_{a_\alpha}, \lambda_{a_\alpha})(\rho_{b_\beta}, \lambda_{b_\beta}) = (\rho_{a_\alpha b_\beta}, \lambda_{a_\alpha b_\beta}) \in \overline{S}_{\alpha\beta}$$
$$= a_\alpha b_\beta .$$

DÉFINITION 2.20. - *Un demi-groupe réunion de groupes est dit de type* (h), *si et seulement si les applications de structure* $\Phi_{\alpha,\beta}$ ($\alpha \geq \beta$) *sont toutes des applications de* S_α *dans la partie interne de* $\overline{S}_\beta$ *isomorphe à* S_β.

Pour de tels demi-groupes, la condition 1) du théorème précédent est remplie d'office et,

PROPOSITION 2.21. – *Un demi-groupe réunion de groupes est de type (h) si et seulement si les* $\Phi_{\alpha,\beta}(\alpha \geq \beta)$ *sont des homomorphismes de la* $\mathfrak{J}$*-classe* S_α *dans la* $\mathfrak{J}$*-classe* S_β *tels que pour* $\alpha > \beta > \gamma$, $\Phi_{\alpha,\beta} \cdot \Phi_{\beta,\gamma} = \Phi_{\alpha,\gamma}$, $\Phi_{\alpha,\alpha}$ *étant l'application identité sur* S_α.

DÉMONSTRATION. – Si D est un demi-groupe réunion de groupe de type (h), en appliquant 2) du théorème 2.19 avec $\alpha = \beta > \gamma$, on obtient: $(a_\alpha b_\alpha)\Phi_{\alpha,\gamma} = a_\alpha\Phi_{\alpha,\gamma} \cdot b_\alpha\Phi_{\alpha,\gamma}$; donc $\Phi_{\alpha,\gamma}$ est un homomorphisme de S_α dans S_β. Pour $\alpha > \beta > \gamma$, $\alpha\beta = \beta > \gamma$; 2) et 3) (th. 2.19) nous donnent:

$$[a_\alpha\Phi_{\alpha,\beta} \cdot b_\beta]\Phi_{\beta,\gamma} = a_\alpha\Phi_{\alpha,\gamma} \cdot b_\beta\Phi_{\beta,\gamma}.$$

Comme $\Phi_{\beta,\gamma}$ est un homomorphisme:

$$a_\alpha\Phi_{\alpha,\beta}\Phi_{\beta,\gamma} \cdot b_\beta\Phi_{\beta,\gamma} = a_\alpha\Phi_{\alpha,\beta} \cdot b_\beta\Phi_{\beta,\gamma}.$$

On démontre de même: $b_\beta\Phi_{\beta,\gamma} \cdot a_\alpha\Phi_{\alpha,\beta}\Phi_{\beta,\gamma} = b_\beta\Phi_{\beta,\gamma} \cdot a_\alpha\Phi_{\alpha,\gamma}$. Mais S_γ est un demi-groupe complètement simple, donc il est faiblement simplifiable (cf. théorème 4.1). Il en résulte $a_\alpha\Phi_{\alpha,\beta}\Phi_{\beta,\gamma} = a_\alpha\Phi_{\alpha,\gamma}$. La réciproque est évidente.

D'après cette proposition, la structure des demi-groupes réunion de groupes de type (h) est déterminée par la donnée d'un système inductif d'homomorphismes de demi-groupes complètement simples. Ce système inductif a pour support un demi-treillis quelconque.

THÉORÈME 2.22. – *Pour qu'un demi-groupe réunion de groupes soit de type (h), il faut et il suffit que pour tout* α, $\beta \in Y$ *tels que* $\alpha > \beta$, *il existe un idempotent* $e_\alpha \in S_\alpha$ *tel que* $e_\alpha S_\beta e_\alpha$ *soit un sous-groupe maximal de* S_β. *Dans ce cas, pour tout idempotent* $e_\alpha \in S_\alpha$, $e_\alpha S_\beta e_\alpha$ *est un sous-groupe maximal de* S_β.

DÉMONSTRATION. – La condition est nécessaire, car pour tout $x_\beta \in S_\beta$, $e_\alpha x_\beta e_\alpha = e_\alpha\Phi_{\alpha\beta} \cdot x_\beta \cdot e_\alpha\Phi_{\alpha\beta}$ et $e_\alpha S_\beta e_\alpha = e_\alpha\Phi_{\alpha\beta} \cdot S_\beta \cdot e_\alpha\Phi_{\alpha\beta}$ qui est le sous-groupe maximal relatif à l'idempotent $e_\alpha\Phi_{\alpha\beta}$. Pour montrer que la condition est suffisante:

a) Supposons que $e_\alpha S_\beta e_\alpha = H_{e_\beta}$ où $e_\beta = e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha$. Si $(f_\beta, e_\beta) \in \mathcal{R}$, $f_\beta e_\beta = e_\beta$ et $e_\beta f_\beta = f_\beta$. Il en résulte: $(f_\beta e_\alpha)(f_\beta e_\alpha) = f_\beta(e_\alpha f_\beta e_\alpha) = f_\beta(e_\alpha e_\beta f_\beta)e_\alpha = f_\beta e_\alpha$. Mais $e_\alpha f_\beta e_\alpha \in H_{e_\beta}$ et c'est un idempotent. Donc $e_\alpha f_\beta e_\alpha = e_\beta$. D'où: $f_\beta e_\alpha f_\beta e_\alpha = f_\beta e_\beta = f_\beta e_\alpha = e_\beta$. De même si $(f_\beta, e_\beta) \in \mathcal{L}$ on en déduit $e_\alpha f_\beta = e_\beta$. Inversement, si pour un idempotent f_β on a: $f_\beta e_\alpha = e_\beta$, il en résulte $(f_\beta, e_\beta) \in \mathcal{R}$; par conséquent $(f_\beta, e_\beta) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f_\beta e_\alpha = e_\beta$ et $(f_\beta, e_\beta) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow e_\alpha f_\beta = e_\beta$.

b) Soit $x_\beta \in S_\beta$. On a: $e_\alpha x_\beta = e_\alpha e'_\beta x_\beta$, où il est possible de choisir l'idempotent e'_β de façon que $(e'_\beta, e_\beta) \in \mathcal{L}$ (si $x_\beta = (x; j, \mu)$, en prenant $e'_\beta = (p_{\lambda j}^{-1}; j, \lambda)$ on obtient bien $e'_\beta x_j = x_\beta$; il suffit de prendre l'indice λ repérant la $\mathcal{L}$-classe de e_β pour avoir $(e'_\beta, e_\beta) \in \mathcal{L}$). D'après *a*), $e_\alpha e'_\beta = e_\beta$, d'où $e_\alpha x_\beta = e_\beta x_\beta$. On démontre de même $x_\beta e_\alpha = x_\beta e_\beta$.

c) Soit e'_α un idempotent quelconque de S_α. Dans le demi-groupe de matrices de REES associé à S_α on pose $e_\alpha = (p_{\lambda i}^{-1};\ i,\ \lambda)$ et $e'_\alpha = (p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu)$. Pour tout $x_\beta \in S_\beta$:

$$e'_\alpha x_\beta = (p_{\mu i}^{-1};\ j,\ \mu)x_\beta = (p_{\lambda j}^{-1},\ j,\ \lambda)\,(p_{\lambda i}^{-1};\ i,\ \lambda)\,(p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu)x_\beta = (p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\alpha(p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu)x_\beta .$$

Mais $(p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu)x_\beta \in S_\beta$ et d'après *b*) : $e_\alpha(p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu)x_\beta = e_\beta(p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu)x_\beta$. D'où :

$$e'_\alpha x_\beta = (p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\beta(p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu)x_\beta \text{ et de même :}$$

$$x_\beta e'_\alpha = x_\beta(p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\beta(p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu).$$

Or $(p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\beta(p_{\mu j}^{-1};\ j,\ \mu)$ est un idempotent e'_β de S_β car d'après la dernière égalité écrite on a :

$$\begin{aligned}(p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\beta e'_\alpha &= (p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\beta\ (p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\beta e'_\alpha \\ &= (p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\beta e'_\alpha(p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)e_\beta e'_\alpha .\end{aligned}$$

En définitive pour tout idempotent $e'_\alpha \in S_\alpha$, il existe un idempotent $e'_\beta \in S_\beta$ tel que pour tout $x_\beta \in S_\beta = e'_\alpha x_\beta = e'_\beta x_\beta$ et $x_\beta e'_\alpha = x_\beta e'_\beta$.

d) Soit a_α un élément quelconque de S_α. Il existe un idempotent $e_\alpha \in S_\alpha$ tel que $a_\alpha e_\alpha = e_\alpha a_\alpha = a_\alpha$. Pour tout $x_\beta \in S_\beta$:

$$a_\alpha x_\beta = a_\alpha e_\alpha x_\beta = a_\alpha e_\beta x_\beta$$

$$x_\beta a_\alpha = x_\beta a_\alpha e_\alpha = x_\beta a_\alpha e_\beta$$

où e_β est l'idempotent associé à e_α d'après *c*). En posant $a_\beta = a_\alpha e_\beta$, on peut affirmer que pour tout $a_\alpha \in S_\alpha$, il existe $a_\beta \in S_\beta$ tel que pour tout $x_\beta \in S_\beta$, $a_\alpha x_\beta = a_\beta x_\beta$ et $x_\beta a_\alpha = x_\beta b_\beta$. Pour $\alpha \geq \beta$ l'application de structure $\Phi_{\alpha,\beta}$: $a_\alpha \to (\varrho_{a_\alpha},\ \lambda_{a_\alpha}) = (\varrho_{a_\beta},\ \lambda_{a_\beta})$ de S_α dans S_β est une application de S_α dans la partie interne de S_β. D'après la définition 2.20, D est de type (*h*).

COROLLAIRE 2.23. – *Un demi-groupe réunion de groupes est produit sous-direct de demi-groupes complètement 0-simples* ([20]) *si et seulement si il est de type* (*h*).

DÉMONSTRATION. – Soit D réunion de groupes, produit sous-direct de demi-groupes complètement 0-simples. Soient $\alpha, \beta \in Y$ tels que $\alpha \geq \beta$. Pour les $\mathfrak{J}$-classes correspondantes S_α, S_β on a : $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha \subseteq S_\beta$. Pour e_α idempotent de S_α et $x_\beta \in S_\beta$, $e_\alpha x_\beta \in S_\beta$ et il existe x'_β tel que $e_\alpha x_\beta x'_\beta = e_\beta$ idempotent de S_β. Il en résulte $e_\alpha e_\beta = e_\beta$; $e_\beta e_\alpha$ est donc un idempotent de S_β tel que $e_\beta e_\alpha \leq e_\alpha$. D'après le théorème 2.17, tout idempotent f_α de S_α est

([20]) On peut remplacer « complètement 0-simples » par « complètement 0-simples sans diviseurs de zéro propres ».

supérieur à un seul idempotent f_β de S_β; donc si $f_\alpha x_\beta f_\alpha \in H_{g_\beta}$ (H_{g_β} est un sous-groupe maximal de S_β) il existe y_β tel que $f_\alpha x_\beta f_\alpha y_\beta = y_\beta f_\alpha x_\beta f_\alpha = g_\beta$ et $g_\beta \leq f_\alpha$; d'où il résulte $g_\beta = f_\beta$ et $f_\alpha S_\beta f_\alpha \in H_{f_\beta}$. Enfin pour tout $x_\beta \in H_{f_\beta}$: $x_\beta \in f_\beta S_\beta f_\beta = f_\alpha f_\beta S_\beta f_\beta f_\alpha \subseteq f_\alpha S_\beta f_\alpha$, d'où $f_\alpha S_\beta f_\alpha = H_{f_\beta}$. D'après le théorème 2.22, D est de type (h).

Réciproquement, si D est de type (h), supposons que $J(b) \subset J(a)$. Si pour un élément $x \in J_a$, $xJ(b)x \subseteq I(b)$, alors $xbx \notin J_b$ et $J_a \cdot J_b \subseteq J_b$. Dans ce cas pour tout $y \in J_a$, $yJ(b)y \subseteq I(b)$. Si au contraire, il existe $x \in J_a$ tel que $xJ_bx \subseteq J_b$ on a $J_a \cdot J_b \subseteq J_b$ et il existe un homomorphisme de J_a dans J_b; d'après la définition de la multiplication dans les demi-groupes de type (h), cet homomorphisme vérifie la condition (C) du théorème 2.12. D'après ce même théorème, D est produit sous-direct de demi-groupes complètement 0-simples. Chaque $\mathfrak{J}$-classe d'un demi-groupe réunion de groupes étant un sous-demi-groupe, les demi-groupes complètement 0-simples intervenant comme composants du produit sous-direct peuvent être pris avec un zéro complètement premier ($ab = o \Rightarrow a = o$ ou $b = o$).

COROLLAIRE 2.24. - *Pour un demi-groupe D, il y a équivalence entre*:

a) *D est régulier et produit sous-direct de groupes avec zéro*;

b) *D est un demi-groupe inverse réunion de groupes*;

c) *D est réunion de groupes de type (h) et chaque $\mathfrak{J}$-classe S_α est un groupe* [21].

Un demi-groupe D admet une série principale (Σ), s'il existe une chaîne décroissante d'idéaux bilatères I_p:

$$D = I_n \supset I_{n-1} \supset \ldots \supset I_p \supset \ldots \supset I_1 \supset I_0 = \emptyset \quad (\Sigma)$$

tels qu'il n'existe pas d'idéaux de D compris strictement entre I_p et I_{p+1}. On sait (cf. [2], par. 2.6) que pour tel demi-groupe les facteurs I_p/I_{p-1} sont isomorphes dans un certain ordre aux facteurs principaux de D. Les résultats du paragraphe 3 (th. 2.12 - 2.17) s'appliquent à de tels demi-groupes (supposés réguliers) sous la forme suivante: Un demi-groupe régulier à série principale (Σ) est produit sous-direct de demi-groupes complètement 0-simples si et seulement si: 1) I_p/I_{p-1} est complètement 0-simple pour tout $p = 1, 2, \ldots, n$; 2) $p \geq q$ implique *ou bien* $xI_qx \subseteq I_{q-1}$ pour tout $x \in I_p/I_{p-1}$, *ou bien* il existe un homomorphisme partiel $\Phi_{p,q}$ de $I_p \setminus I_{p-1}$ dans $I_q \setminus I_{q-1}$ vérifiant la condition (C) du théorème 2.12. Le premier terme de cette alternative est équivalent à: aucun idempotent de $I_p \setminus I_{p-1}$ n'est supérieur à un idempotent de $I_q \setminus I_{q-1}$, le second est équivalent à: chaque idempotent de $I_p \setminus I_{p-1}$ est supérieur à un seul idempotent de $I_q \setminus I_{q-1}$.

---

[21] D est un demi-treillis de groupes. L'équivalence de *b*) et *c*) est le théorème de CLIFFORD [3].

Dans ces conditions si $p > q > r$ $(p, q, r \in [1, n])$, et s'il existe des homomorphismes partiels $\Phi_{r,q}$ et $\Phi_{q,}$, alors il existe aussi $\Phi_{p,r}$ et:

$$\Phi_{p,q} \cdot \Phi_{q,r} = \Phi_{p,r}.$$

En utilisant cette propriété, il est possible d'obtenir un théorème de structure basé (comme d'ailleurs les remarques qui précèdent) sur le fait que l'ensemble ordonné sous-jacent est l'intervalle $[1, n]$. Vu la complication de ce théorème et son caractère par trop descriptif, nous imposerons une condition supplémentaire aux demi-groupes étudiés:

CONDITION (T). – *S'il existe (pour $p > q > r$) des homomorphismes partiels $\Phi_{p,q}$ et $\Phi_{p,r}$, il existe aussi $\Phi_{q,r}$ et $\Phi_{p,q} \cdot \Phi_{q,r} = \Phi_{p,r}$.*

Nous appelons (T)-*demi-groupe*, un demi-groupe régulier à série principale, produit sous-direct de demi-groupes complètement 0-simples et dont les homomorphismes partiels vérifient la condition (T). Les théorèmes qui suivent concernent les T-demi-gronpes avec zéro, le cas sans zéro s'en déduisant sans difficulté.

THÉORÈME 2.25. – *Un demi-groupe D avec zéro, est un (T)-demi-groupe, si et seulement si:*

a) D est régulier avec une série principale;

b) Chaque idempotent non nul de D couvre un seul idempotent;

c) L'ensemble ordonné des idempotents est de longueur finie.

DÉMONSTRATION. – 1) Soit $e \neq 0$ un idempotent d'un T-demi-groupe D. Si e ne couvre pas 0, il existe un idempotent f tel que $e > f > 0$. Comme $fe = ef = f \neq 0$, $e \in I_p \setminus I_{p-1}$ et $f \in I_q \setminus I_{q-1}$ avec $p > q$. Il existe alors un homomorphisme partiel $\Phi_{p,q}$. Soit q_0 le plus grand entier $q < p$ tel que $\Phi_{p,q}$ existe. L'élément $e_0 = e\Phi_{p,q_0}$ est un idempotent tel que $e > e_0$. S'il existait e_1 tel que $e > e_1 > e_0$, on aurait $e_1 \in I_{q_1} \setminus I_{q_1-1}$, d'où l'existence d'un homomorphisme Φ_{r,q_1} avec $q_1 > q_0$, ce qui est impossible; donc e couvre $e\Phi_{p,q_0} = e_0 \neq 0$. Supposons qu'il existe un idempotent $e_2 \neq e_0$ tel que e couvre e_2. Par définition de q_0, $e_2 \in I_{q_2} \setminus I_{q_2-1}$ avec $q_2 \leq q_0$. Si $q_2 = q_0$, $e_2 = e_0$ (chaque idempotent de $I_p \setminus I_{p-1}$ est supérieur à un seulidempotent de $I_{q_0} \setminus I_{q_0-1}$). Donc $q_2 < q_0 < p$; Φ_{p,q_0} existe, ainsi que Φ_{p,q_2}. D'après la condition (T), Φ_{q_0,q_2} existe et $\Phi_{p,q_2} = \Phi_{r,q_0} \cdot \Phi_{q_0,q_2}$; il en résulte $e_2 = e_0\Phi_{q_0,q_2}$ d'où $e_2 < e_0 < e$, ce qui contredit e couvre e_2. Enfin si e couvre 0 et si e couvre un idempotent f, on a: $e > f \geq 0$ d'où $f = 0$. Les propriétés $a)$ et $c)$ sont évidentes.

2) Réciproquement, soit D un demi-groupe avec zéro vérifiant $a)$ et $b)$. D'après $a)$, D est semi-simple. Pour montrer que I_p/I_{p-1} est complètement 0-simple $(p \geq 2)$, il suffit d'établir qu'il existe un idempotent primitif dans

I_p/I_{p-1}. Soient e, f des idempotents de $I_p \setminus I_{p-1}$ tel que $f < e$ c'est-à-dire $ef = fe = f \neq e$. Il existe $x, y \in D$ tels que $e = xfy$; en posant $f_1 = fyfxf$, on vérifie que f_1 est un idempotent; $f_1 \in J(f)$ et comme $xf_1y = efe = f$, $f \in J(f_1)$, ce qui prouve que $f_1 \in I_p \setminus I_{p-1}$. On ne peut avoir $f_1 = f$ sinon $f = fyfxf$ entraînerait $e = xfy = efe = f$; donc $f_1 < f < e$. En définissant de même $f_{n+1} = f_n y_n f_n x_n f_n$ avec $e = x_n f_n y_n$ on met en évidence une chaîne $e > f > f_1 > > \ldots > f_n > \ldots$ dénombrable d'idempotents ce qui contredit *c*). Donc D est complètement semi-simple.

Soit $p > q$ et soit e_1 un idempotent de $I_p \setminus I_{p-1}$. Supposons qu'il existe un idempotent $f_1 \in I_q \setminus I_{q-1}$ tel que $e_1 > f_1$. D'après *b*) et *c*), f_1 est unique. Pour tout idempotent $e \in I_p \setminus I_{p-1}$, on a $(e, e_1) \in \mathfrak{D} = \mathfrak{J}$. Il existe alors $x \in D$ et un inverse x' de x tel que $xx' = e_1$ et $x'x = e$. De $xx'f_1 = f_1xx' = f_1$ on déduit

$$f_1x \cdot x'f_1 \cdot f_1x = f_1x \quad \text{et} \quad x'f_1 \cdot f_1x \cdot x'f_1 = x'f_1.$$

L'élément $x'f_1x$ est donc un idempotent f de $I_q \setminus I_{q-1}$ ete $f = x'xx'f_1x = = x'f_1x = f$, $fe = x'f_1xx'x = x'f_1x = f$ d'où $e > f$. Comme précédemment f est le seul idempotent de $I_q \setminus I_{q-1}$ tel que $e > f$. Ceci achève de montrer que D est produit sous-direct de demi-groupes complètement 0-simples.

Enfin si $\Phi_{p,q}$ et $\Phi_{p,r}$ existent ($p \geq q > r$), tout idempotent e de $I_p \setminus I_{p-1}$ est supérieur à un idempotent f de $I_q \setminus I_{q-1}$ et à un idempotent g de $I_r \setminus I_{r-1}$. D'après *b*) et *c*) f et g sont comparables donc $f > g$ (car $q > r$). Il en résulte que $\Phi_{q,r}$ existe. L'égalité $\Phi_{p,q}\Phi_{q,r} = \Phi_{p,r}$ résulte alors du fait que $x\Phi_{p,q}^{h} = = x \cdot (g\Phi_{p,q}) = x(g\Phi_{p,q}\Phi_{q,r}^{h}) = x(g\Phi_{p,r})$ où g est un idempotent de $I_p \setminus I_{p-1}$ tel que $x = xg$. D vérifie donc la condition (T).

DÉFINITION 2.26. - *Un ensemble ordonné avec élément nul, qui vérifie*:

1) *la condition de chaîne descendante*;

2) *chaque élément non nul couvre un seul élément*;

est appelé un arbre.

Du théorème 2.25 il résulte que:

COROLLAIRE 2.27. - *Dans un (T)-demi-groupe, l'ensemble de $\mathfrak{J}$-classes de Green, ordonnées par: $J_a \leq J_b \Leftrightarrow$ il existe des idempotents $e \in J_a$, $f \in J_b$ tels que $e \leq f$ est un arbre fini.*

Le théorème suivant indique la structure des (T)-demi-groupes; c'est un cas particulier d'un théorème plus général dû à M. PETRICH et à l'auteur.

THÉORÈME 2.28. - *Soit T un arbre fini dont l'élément nul est noté 0_T. A chaque $\alpha \in T \setminus 0_T$ on associe un demi-groupe complètement 0-simple S_α de zéro 0_α. On pose $S_\alpha^* = S_\alpha \setminus 0_\alpha$. Supposons que pour chaque $\alpha \in T$ de hauteur $h(\alpha) > 1$, il existe un homomorphisme partiel φ_α de S_α^* dans $S_{\bar{\alpha}}^*$ où $\bar{\alpha}$ est*

l'unique élément de T couvert par α. Sur $D = (\bigcup_{\substack{\alpha \in T \\ \alpha \neq 0_T}} S_\alpha^*) \cup (0)$ *on définit une opération $\circ$ par récurrence de la façon suivante:*

1) *Si $x \in S_\alpha^*$, $y \in S_\beta^*$ avec $h(\alpha) = h(\beta) = 1$,*

   a) pour $\alpha = \beta$, $x \circ y = xy$ si $xy \neq 0_\alpha$ et 0 sinon.

   b) pour $\alpha \neq \beta$ $x \circ y = 0$.

2) *Si $x \in S_\alpha^*$, $y \in S_\beta^*$ avec par exemple: $h(\alpha) = n$ et $h(\beta) \leq n$.*

$x \circ y = xy$ si $\alpha = \beta$ et $xy \neq 0_\alpha$; $x \circ y = x\varphi_\gamma \circ y\varphi_\beta$ si $\alpha = \beta$ et $xy = 0_\alpha$ ou si $\alpha \neq \beta$ et $h(\beta) = n$; $x \circ y = x\varphi_\alpha \circ y$ si $h(\beta) < n$. Enfin pour tout $x \in D$ $x \circ 0 = 0 \circ x = 0$.

Muni de l'opération $\circ$, D est un (T)–demi–groupe. Réciproquement tout (T)–demi–groupe a la structure précédente, l'arbre T étant l'ensemble des $\mathfrak{J}$–classes muni de la relation d'ordre indiquée au corollaire 2.27.

DÉMONSTRATION. – Indiquons seulement les principales étapes de la démonstration. On vérifie que D est un demi–groupe. D est régulier car chaque S_α l'est. La hauteur de α dans T coïncide avec la hauteur des idempotents de S_α^*: l'ensemble des idempotents est donc de hauteur finie. Pour $e \in S_\alpha^*$, $e\varphi_\alpha$ est un idempotent de S_α^* (α est supposé de hauteur ≥ 2) et $e\varphi_\alpha$ est le seul idempotent couvert par e; les idempotents de hauteur 1 couvrent seulement 0. Enfin D a une série principale: cela résulte du fait que l'arbre est fini; on peut alors construire une chaîne croissante finie d'idéaux à partir d'une chaîne croissante de T que l'on complète progressivement. D'après le théorème 2.25, D est alors un (T)–demi–groupe. Pour montrer que, réciproquement, tout (T)–demi–groupe a la structure indiquée, on considére l'arbre défini par le corollaire 2.27. En posant $T = D/\mathfrak{J}$ on indexe les $\mathfrak{J}$–classes par les éléments de T. D'après le théorème 2.12 on sait qu'il existe un homomorphisme partiel de J_α dans J_α ($\bar{\alpha}$ est l'élément de T couvert par α). Enfin on montre que l'opération de D à les propriétés 1) et 2). Les propriétés 2) résultent immédiatement des propriétés de composition des homomorphismes partiels d'un (T)–demi–groupe.

CHAPITRE III.

Congruences sur les demi-groupes réguliers.

1. – Demi-groupes $\mathfrak{K}$-réguliers.

D étant un demi–groupe quelconque, désignons par $\mathfrak{K}$ l'une des équivalences de GREEN, $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{J}$ sur D. Soient E l'ensemble éventuellement vide des idempotents de D et $\rho|E = \rho \cap (E \times E)$ la restriction à E d'une congruence ρ sur D.

DÉFINITION 3.1. - *Un demi-groupe D est dit $\mathcal{K}$-régulier si pour toute congruence ρ sur D, $\rho|E \subseteq \mathcal{K}|E$ entraîne $\rho \subseteq \mathcal{K}$.*

EXEMPLE. - Un demi-groupe simple à droite, simplifiable à droite, sans idempotent est $\mathcal{R} = \mathcal{D}$-régulier mais non $\mathcal{L}$-régulier. D'autres exemples apparaîtront dans la suite.

Une $\mathcal{K}$-classe contient au plus un idempotent, donc $\mathcal{K}|E$ coïncide avec l'égalité et une congruence ρ telle que $\rho|E \subseteq \mathcal{K}|E$ (ou, ce qui est équivalent, $\rho|E = \mathcal{K}|E$) est telle qu'il y a un idempotent au plus par classe ; on dit que ρ *sépare les idempotents* [13]. L'objet de ce paragraphe est de donner des conditions nécessaires, très larges vu le nombre restreint des congruences dont on dispose, pour qu'un demi-groupe soit $\mathcal{K}$-régulier.

DÉFINITION 3.2. - *a) Soit I un idéal bilatère propre de D. D est dit I-inversé si pour tout $a \notin I$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in E \setminus I$ supposé non vide.*

b) D est dit inversé, s'il est sans zéro et si pour tout $a \in D$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in E$.

Si D est I-inversé, il existe $x \in D$ tel que $axax = ax \notin I$ et $[(xax)a][(xax)a] = x(ax)(ax)(ax)a = (xax)a$; il existe donc aussi $y \in D$ ($y = xax$) tel que $ya \in E \setminus I$ ($ya \notin I$ car $ax = ayax \notin I$). Ceci nous montre que les définitions a) et b) ne sont pas latéralisées. De plus, si $E \setminus I \neq \emptyset$, $E \setminus I$ est un complexe équirésiduel et son résidu contient I.

Les congruences qui interviennent pour obtenir des conditions nécessaires de $\mathcal{K}$-régularité sont les congruences de REES $\rho_I = (I \times I) \cup i_D$ où I est un idéal bilatère de D et i_D est l'égalité sur D. D'abord :

LEMME 3.3. - *Si une $\mathcal{K}$-classe de Green K contient un idéal bilatère I de D, K coïncide avec I et c'est le noyau (c'est-à-dise l'idéal bilatère minimum) de D. Lorsque $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ [resp. $\mathcal{L}$], K est simple à droite [resp. à gauche] ; lorsque $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, K est un groupe* ([22]).

DÉMONSTRATION. - Soit $a \in I \subseteq K$. Pour tout $x \in K$, $(a, x) \in \mathcal{J}$, donc $x \in D^1 a D^1 \subseteq I$ et $K = I$. Si I' est un idéal bilatère de D, $I' \cap K$ est un idéal contenu dans K, donc $I' \cap K = K$ et $K \subseteq I'$; donc K est l'idéal bilatère minimum de D.

Supposons $\mathcal{K} = \mathcal{R}$. Pour tout $a \in K$, $aD^1 \subseteq K$. Mais $x \in K$ implique $(x, a) \in \mathcal{R}$, donc $x \in aD^1$. Il en résulte $aD^1 = K = D^1 a D^1$. On en déduit $Da \subseteq a \cup aD$ et $K = KaK \subseteq DaK \subseteq aK \cup aDK = aK \subseteq K$. D'où $K = aK$ est simple à droite. Une démonstration analogue vaut pour $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ et le résultat relatif à $\mathcal{K} = \mathcal{H}$

([22]) La question (non résolue) de savoir si, lorsque $\mathcal{K} = \mathcal{D}$, K est bisimple ou non est liée au problème ouvert signalé dans [2] p. 62, ex. 6.

se déduit des précédents. Si $\mathcal{K} = \mathcal{D}$ et si K contient au moins un idempotent, on vérifie que K est bisimple.

PROPOSITION 3.4. - 1°) *Si D est $\mathcal{K}$–régulier, il est inversé ou 0–inversé ;*

2°) *Si D est respectivement $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{J}$–régulier, — ou bien il est sans idempotent et respectivement simple à droite, à gauche, bisimple, simple, — ou bien D a un noyau K sans idempotent (sauf éventuellement lorsque $K = (0)$), simple à droite dans le cas $\mathcal{R}$–régulier, à gauche dans le cas $\mathcal{L}$–régulier et dans tous les cas D est K–inversé, — ou bien D est inversé.*

DÉMONSTRATION. - 1) Supposons que D ayant un zéro soit $\mathcal{K}$–régulier et qu'il existe un idéal bilatère $I \neq (0)$ de D ne contenant pas d'idempotent autre que 0. La congruence de REES ρ_I sépare les idempotents et $\rho_I \subseteq \mathcal{K}$. D'après le lemme 3.3, I est un groupe donc $I = (0)$, ce qui contredit l'hypothèse. Le complexe $E \setminus (0)$ est équirésiduel de résidu un idéal W ne contenant pas d'idempotents non nuls ; donc $W = (0)$ et D est (0)–inversé. Lorsque D n'a pas de zéro, de légères modifications de la démonstration précédente montrent que E est net et D est inversé.

2) Si D est sans idempotent, il est respectivement simple à droite, à gauche, bisimple ou simple. Si D a un zéro, comme en 1) tout idéal non nul de D contient un idempotent non nul, le résidu de $E \setminus (0)$ est donc (0) et D est 0–inversé. Si D a un noyau K non réduit à (0),

— ou bien K contient un idempotent e et pour tout $a \in D$ il existe x tel que $ax \in K$ (par exemple $x = e$) ; comme K est simple il existe u, $v \in K$ tels que $uaxv = e$; $(xveua)(xveua) = xveua \in K$; donc D est inversé.

— ou bien K est sans idempotent ; comme en 1), tout idéal I tel que $K \subset I$ contient un idempotent : le résidu W de E (E n'est pas net car K est sans idempotent et $K \subseteq W$) coïncide donc avec K et D est K–inversé. Dans ce dernier cas les propriétés particulières de K relatives à la $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{L}$–régularité résultent du lemme 3.3.

Les conditions de $\mathcal{K}$–régularité énoncées ci–dessus ne sont pas suffisantes. Par exemple dans le demi–groupe fini dont la table est donnée ci–contre,

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	a
c	a	a	c	a	c
d	d	d	d	d	d
e	a	a	c	a	c

$\mathcal{R} = \mathcal{H} = i$ (égalité) et $\mathcal{L} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = \{(a, d), b, c, e)\}$. D est inversé: la congruence ρ de classes a, b, (c, e), d, sépare les idempotents et ρ n'est pas contenue dans $\mathcal{K}$ (quel que soit $\mathcal{K}$). Avec des conditions supplémentaires la $\mathcal{K}$–régularité entraîne la régularité ($\forall a \in D$, $\exists x \in D : axa = a$); par exemple: *si un demi–groupe D commutatif est $\mathcal{K}$–régulier, il est régulier.* En effet, la relation: $(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a$ divise une puissance de b et b divise une puissance de a, est la plus fine congruence idempotente sur D ([2], par. 4.3), Comme ρ sépare les idempotents, ρ est contenue dans $\mathcal{K}$. Les ρ–classes sont des sous–demi–groupes, donc D est réunion de groupes ([2], théorème 2.16).

D'une façon générale, le problème suivant reste ouvert: un demi–groupe quelconque, $\mathcal{K}$ régulier pour tout $\mathcal{K}$, est–il régulier? Ce problème est lié à l'étude des $\mathcal{D}$–classes irrégulières dans un demi–groupe quelconque.

2. – Comparaison des congruences et des équivalences de Green dans un demi–groupe régulier.

Nous utiliserons dans ce paragraphe des relations d'ordre sur les classes des équivalences de GREEN. Ces relations d'ordre, introduites dans [10] pour un demi–groupe quelconque et utilisées à diverses reprises notamment par MUNN [20], se définissent de la façon suivante pour un demi–groupe régulier: nous notons K_a la $\mathcal{K}$–classe d'un élément a, et nous ordonnons l'ensembles des $\mathcal{R}$–[resp. $\mathcal{L}$–] classes par $R_a \leq R_b \Leftrightarrow aD \subseteq bD$ [resp. $L_a \leq L_b \Leftrightarrow Da \subseteq Db$], l'ensemble des $\mathcal{H}$–classes par $H_a \leq H_b \Leftrightarrow R_a \leq R_b$ et $L_a \leq L_b$, l'ensemble des $\mathcal{J}$–classes par $J_a \leq J_b \Leftrightarrow DaD \subseteq DbD$. Les relations d'ordre sur les divers ensembles étant notées de la même façon $\leq$, le contexte indiquera de quel ensemble et de quelle relation il s'agit. Signalons que les relations définies ne sont pas indépendantes: par exemple, $R_a \leq R_b \Rightarrow J_a \leq J_b$. Il n'est pas possible, en général, de définir une relation d'ordre sur les $\mathcal{D}$–classes de façon que $R_a \leq R_b$ ou $L_a \leq L_b \Rightarrow D_a \leq D_b \Rightarrow J_a \leq J_b$.

PROPOSITION 3.5. – *Soit ρ une congruence quelconque sur un demi–groupe régulier D et soit X une ρ–classe qui est un sous–demi–groupe de D. Pour tout élément $x \in X$, il existe un idempotent $i \in X$ tel que $H_i \leq H_x$.*

DÉMONSTRATION. – Soit X une ρ–classe qui est un sous–demi–groupe et $x \in X$. Soit $(x^2)'$ un inverse de $x^2 \in X$: $[x(x_2)'x]\,[x(x^2)'x] = x(x^2)'x^2(x^2)'x = x(x^2)'x$. Donc $x(x^2)'x$ est un idempotent i et $H_i \leq H_x$. De plus $i = x(x^2)'x\rho x^2(x^2)'x^2 = x^2\rho x$, ce qui montre que $i \in X$.

En d'autres termes, la proposition 3.5 indique que dans tout homomorphisme d'un demi–groupe régulier sur un autre, le sous–demi–groupe image réciproque d'un idempotent contient un idempotent; la proposition 3.5 a des conséquences immédiates importantes: par exemple, l'image homomorphe d'un demi–groupe inverse est un demi–groupe inverse [22], [26] (si D est inverse

$\varphi(D) = \bar{D}$ est régulier et pour $\bar{e}$, $\bar{f}$ idempotents de $\bar{D}$, il existe $e \in \bar{e}$, $f \in \bar{f}$ où e et f idempotents de D; $ef = fe$ implique $\bar{e}\bar{f} = \bar{f}\bar{e}$ donc $\bar{D}$ est inverse). De même l'image homomorphe d'une somme orthogonale de demi-groupes complètement 0-simples est encore une telle somme orthogonale. (Si dans $\bar{D} = \varphi(D)$ on a $\bar{e}\bar{f} = \bar{f}\bar{e} = \bar{e} \neq \bar{0}$, pour $\bar{e}$ et $\bar{f}$ idempotents de $\bar{D}$, alors $\bar{f}\bar{e}\bar{f} = \bar{e}$ et il existe un idempotent $f = \bar{f}$, tel que pour $x \in e$, $\varphi(fxf) = \varphi(e)$. Il existe alors un idempotent $i \in \bar{e}$ tel que $i = fxfzfxf$; il en résulte $i = f$ et $\bar{i} = \bar{e} = \bar{f}$; dans $\bar{D}$ régulier, tout idempotent non nul est primitif). En particulier l'image homomorphe d'un demi-groupe complètement 0-simple est aussi complètement 0-simple.

THÉORÈME 3.6. - *Tout demi-groupe régulier est $\mathcal{K}$-régulier, $\mathcal{K}$ désignant l'une quelconque des équivalences de Green.*

DÉMONSTRATION. - Nous notons x' un inverse d'un élément $x \in D$.

1) Soit ρ une congruence telle que $\rho|E \subseteq \mathcal{R}|E$. Si $(a, b) \in \rho$, $(aa', ba') \in \rho$ et en appliquant la proposition 3.5., il existe $i \in E$, tel que $H_i \leq H_{ba'}$ avec $(i, aa') \in \rho$.

Comme $\rho | E \subseteq \mathcal{R} | E$, $R_{aa'} = R_i \leq R_{ba'} \leq R_b$. Or $R_{aa'} = R_a$ donc $R_a \leq R_b$. On démontre de même $R_b \leq R_a$, d'où $(a, b) \in \mathcal{R}$ et $\rho \subseteq \mathcal{R}$. Symétriquement D est aussi $\mathcal{L}$-régulier. La $\mathcal{K}$-régularité se déduit de la $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$-régularité.

2) Soit ρ une congruence telle que $\rho|E \subseteq \mathcal{D}|E$. Nous montrerons $\rho \subseteq \mathcal{D}$ en deux étapes.

a) Supposons d'abord $(x, e) \in \rho$ avec $e \in E$. On a $xx' = f \in E$ et $x'x = g \in E$. En prenant $i = x(x^2)'x$ (cf. proposition 3.5) on obtient: $(i, x) \in \rho$, $fi = i = ig$ et $gif = x'x^2(x^2)'x^2x' = x'x^2x' = gf$. Par ailleurs $(x, f) \in \mathcal{R}$ implique $(gx, gf) \in \mathcal{R}$. On vérifie sans difficulté que gx admet $x'i$ comme inverse, d'où $(x'igx, gx) \in \mathcal{L}$ ou encore $(x'ix, gx) \in \mathcal{L}$. Mais $\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$; il en résulte $(x'ix, gf) \in \mathcal{D}$. Comme $(gf, i) \in \mathcal{D}$ et $(i, e) \in \rho$ (cf. démonstration de la propositon 3.5) impliquent $(i, e) \in \mathcal{D}$, on obtient $x'ix\mathcal{D}gf\mathcal{D}i\mathcal{D}e$. Enfin $x'ix$ est un idempotent et par hypothèse:

$$(x'ix, x'x) \in \rho \Rightarrow (x'ix, x'x) \in \mathcal{D}\,; \quad \text{d'où} \quad x\mathcal{D}x'x\mathcal{D}x'ix\mathcal{D}e.$$

En conclusion: pour tout $x \in D$, $e \in E$, $(x, e) \in \rho \Rightarrow (x, e) \in \mathcal{D}$.

b) Supposons $(a, b) \in \rho$. En posant $b'b = h$ $(h \in E)$ on a les implications:

$$(a, b) \in \rho \Rightarrow (aa', ba') \in \rho \Rightarrow (aa', ba') \in \mathcal{D} \Rightarrow (a, ba') \in \mathcal{D}\,;$$

$$(b, h) \in \mathcal{L} \quad \text{et} \quad (a', a'a) \in \mathcal{R} \Rightarrow (ba', ha'a) \in \mathcal{D}.$$

Or $ha'a = b'ba'a\rho b'aa'a = b'a\rho b'b = h$ et d'après a), $(ha'a, h) \in \mathfrak{D}$. Enfin $(h, b) \in \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}$ et en résumé $a\mathfrak{D}ba'\mathfrak{D}ha'a\mathfrak{D}h\mathfrak{D}b$, ce qui montre que $\rho \subseteq \mathfrak{D}$.

3) Supposons $\rho|E \subseteq \mathfrak{H}|E$. Comme précédemment, si $(x, e) \in \rho$ avec $e \in E$, il existe $i \in E$ tel que $(i, e) \in \rho$ et $H_i \leq H_x$ (proposition 3.5). On en déduit $J_e = J_i \leq J_x$. Maintenant, pour a, b tels que $(a, b) \in \rho : (aa', ba') \in \rho \Rightarrow J_{aa'} \leq \leq J_{ba'} \leq J_b$. Mais $J_{aa'} = J_a$, d'où : $J_a \leq J_b$. En permutant a et b on montre de même $J_b \leq J_a$, d'où $(a, b) \in \mathfrak{H}$.

REMARQUE. - Le théorème 3.6 peut s'interpréter de la façon suivante : sur un demi-groupe régulier une congruence ρ est plus fine que $\mathfrak{R}$ (par exemple) si et seulement si :

$$\forall e, f \in E, (e, f) \in \rho \Rightarrow ef = f \quad \text{et} \quad fe = e ;$$

ρ est plus fine que $\mathfrak{D}$ si et seulement si :

$$\forall e, f \in E. (e, f) \in \rho \Rightarrow \exists x \in D : xx' = e \quad \text{et} \quad x'x = f \quad (x' \text{ inverse de } x).$$

Le théorème 3.6 permet d'affirmer que sur un demi-groupe régulier, pour chaque relation de GREEN $\mathfrak{K}$, les congruences ρ telles que $\rho|E \subseteq \mathfrak{K}|E$, forment un sous-treillis complet du treillis des congruences. De même, s'il existe au moins une congruence ρ, telle que $\rho|E = \mathfrak{K}|E$ (c'est toujours le cas pour $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}$), alors toutes les congruences possédant cette propriété forment un sous-treillis complet.

Les sous-treillis relatifs aux diverses équivalences de GREEN peuvent coïncider ; par exemple, dans un demi-groupe inverse tout idéal principal d'un côté a un générateur idempotent unique ([2], théorème 1.17) ; il en résulte $\mathfrak{R}|E = \mathfrak{L}|E = \mathfrak{H}|E = i_E$ où i_E est l'égalité sur E ; les treillis relatifs à $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{H}$ coïncident. En fait le théorème 3.6 montre que sur un demi-groupe inverse il n'existe pas de congruences ρ ayant l'une des propriétés $\mathfrak{H} \subset \rho \subseteq \mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{H} \subset \rho \subseteq \mathfrak{L}$; en particulier $\mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{L}$ est une congruence si et seulement si le demi-groupe est un demi-treillis de groupes.

COROLLAIRE 3.7. - *Soit D un demi-groupe inverse. Les congruences plus fines que $\mathfrak{R}$ sont aussi plus fines que $\mathfrak{L}$ et réciproquement. $\mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{L}$ est une congruence si et seulement si D est un demi-treillis de groupes.*

Dans la suite notre intérêt portera essentiellement sur le sous-treillis relatif à $\mathfrak{H}$, c'est-à-dire sur les congruences séparant les idempotents. Ce sous-treillis a des propriétés analogues à celles du treillis des congruences (ou des sous-groupes normaux) d'un groupe.

PROPOSITION 3.8. - *Sur un demi-groupe quelconque toute équivalence régulière à gauche plus fine que $\mathfrak{R}$ commute avec toute équivalence régulière à droite plus fine que $\mathfrak{L}$.*

DÉMONSTRATION. – Soit ρ [resp. λ] une équivalence régulière à gauche [resp. à droite] plus fine que $\mathcal{R}$ [resp. $\mathcal{L}$]. Montrons $\rho \circ \lambda \subseteq \lambda \circ \rho$ (cela suffit pour assurer $\rho \circ \lambda = \lambda \circ \rho$).

Si $(a, c) \in \rho$ et $(c, b) \in \lambda$, $a = cu$ et $b = vc$ avec $u, v \in D^1$. En posant $d = bu = vcu = va$ on obtient:

$$(a, c) \in \rho \Rightarrow (va, vc) \in \rho \quad \text{c'est-à-dire } (d, b) \in \rho ;$$

$$(c, b) \in \lambda \Rightarrow (cu, bu) \in \lambda \quad \text{c'est-à-dire } (a, d) \in \lambda.$$

En définitive $(a, b) \in \lambda \circ \rho$.

REMARQUE. – $\mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ est un corollaire de cette proposition (cf. [2], lemme 2.1).

COROLLAIRE 3.9. – *Sur un demi-groupe quelconque le sous-treillis complet des congruences plus fines que $\mathcal{H}$ est modulaire.*

En effet, pour deux congruences ρ_1 et ρ_2 plus fines que $\mathcal{H}$, $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2$; on vérifie alors sans difficulté que si σ, τ sont des congruences plus fines que $\mathcal{H}$

$$\rho \subseteq \tau \Rightarrow (\rho \circ \sigma) \cap \tau \subseteq \rho \circ (\sigma \cap \tau); \text{ (cf. [20]).}$$

COROLLAIRE 3.10. – *Sur un demi-groupe régulier, les congruences séparant les idempotents forment un sous-treillis complet modulaire du treillis des congruences.*

3. – Etude particulière du treillis des congruences séparant les idempotents sur un demi-groupe régulier.

Ces congruences sont caractérisées par le théorème suivant:

THÉORÈME 3.11. – *Soient D un demi-groupe régulier, E l'ensemble de ses idempotents, et $\mathfrak{N}$ une famille de sous-groupes normaux N_e $(e \in E)$ des sous-groupes maximaux, vérifiant les conditions (A) et (B) suivantes:*

$$(A) \qquad \begin{cases} fe = f \Rightarrow fN_e \subseteq N_f \quad \textit{pour tout} \quad e, f \in E; \\ ef = f \Rightarrow N_e f \subseteq N_f \quad \textit{pour tout} \quad e, f \in E. \end{cases}$$

$$(B) \qquad \forall a \in D, \ \forall a' \in D, \ a' \ \textit{inverse de} \ a : aN_{(a'a)} \subseteq N_{(aa')}a.$$

Posons $(a, b) \in \rho_{\mathfrak{N}}$ si et seulement si il existe un inverse a' de a et un inverse b' de b tels que $ab' \in N_{(bb')}$ et $a'b \in N_{(a'a)}$. Alors $\rho_{\mathfrak{N}}$ est une congruence plus fine que $\mathcal{H}$ dont les classes des idempotents sont précisément les N_e. Réciproquement, toute congruence plus fine que $\mathcal{H}$ est du type $\rho_{\mathfrak{N}}$.

REMARQUES. – 1) La condition (A) est équivalente à: $fe=f \Rightarrow N_f \cdot N_e \subseteq N_f$ et $ef=f \Rightarrow N_e \cdot N_f \subseteq N_f$. La condition (B) équivalente à: $aN_{(a'a)}a' \subseteq N_{aa'}$ pour tout $a \in D$ et a' inverse de a, exprime que les sous–groupes normaux situés dans une même $\mathfrak{D}$–classe sont tous isomorphes.

2) Les conditions (A) et (B) sont indépendantes. Dans un demi–groupe D réunion de groupes (B) est vérifiée par la famille formée de tous les sous–groupes maximaux. Pour cette famille, (A) n'est vérifiée que si D est une bande de groupes ($\mathcal{H}$ est une congruence). Donc (B) n'entraîne pas (A). Dans un demi–groupe de BRANDT (complètement 0–simple et inverse) $fe=f$ implique $f=0$ ou $f=e$ et (A) est vérifiée en prenant une famille $\mathfrak{n}$ quelconque de sous–groupes normaux des sous–groupes maximaux. Or (B) impose que ces sous–groupes $(\neq 0)$ soient isomorphes. Donc (A) n'entraîne pas (B).

3) Les conditions de définition de $\rho_\mathfrak{n}$ ne peuvent se réduire à l'une d'entre elles: par exemple, si D est complètement simple avec $\mathfrak{n}=\{\{e\}, \ldots\}$ où $e \in E$, $a=(x;\ i,\ \lambda)$ et $b=(xp_{\lambda i}p_{\mu i}^{-1};\ i,\ \mu)$ avec $\lambda \neq \mu$, sont tels qu'il existe $b'=(p_{\lambda i}^{-1}x^{-1}p_{\mu i}^{-1};\ i,\ \mu)$ satisfaisant à $ab'=bb'$; et pourtant $a'b \neq a'a$ pour tout a' inverse de a.

DÉMONSTRATION. – 1) $\rho_\mathfrak{n} \subseteq \mathcal{H}$. En effet, si $(a, b) \in \rho_\mathfrak{n}$, il existe a' et b' tels que $(ab',\ bb') \in \mathcal{H}$ et $(a'b,\ a'a) \in \mathcal{H}$. Il en résulte

$$bb' \in ab'D \subseteq aD \text{ et } bD = bb'D \subseteq aD = aa'D.$$

On en déduit $aa'b=b$. Or $(a'b,\ a'a) \in \mathcal{R}$ implique $(aa'b,\ a) \in \mathcal{R}$ c'est–à–dire $(a, b) \in \mathcal{R}$. De même $(a, b) \in \mathcal{L}$. Notons que $(a, b) \in \mathcal{H}$ est équivalent à $a=bb'a= ab'b$ et $b=ba'a$.

2) $\rho_\mathfrak{n}$ est symétrique. En effet, pour $(a, b) \in \rho_\mathfrak{n}$, $ab' \in N_{(bb')}$ et $a'b \in N_{(a'a)}$ impliquent $ba'=aa'ba' \in aN_{(a'a)}a' \subseteq N_{(aa')}$ et $b'a=b'ab'b \in b'N_{(bb')}b' \subseteq N_{(b'b}$ (condition (B)).

3) $\rho_\mathfrak{n}$ est transitive. Avec $(a, b) \in \rho_\mathfrak{n}$ et $(b, c) \in \rho_\mathfrak{n}$ on a: $ab' \in N_{(bb')}$, $a'b \in N_{(a'a)}$, $bc' \in N_{(cc')}$ et $b''c \in N_{(b''b)}$ où b' et b'' sont deux inverses de b. D'après 1), a, b et c sont $\mathcal{H}$–équivalents, donc $bb'cc'=cc'$ et $a'ab''b=a'a$. Dans ces conditions: $ac'=ab'bc' \in N_{(bb')} \cdot N_{(cc')} \subseteq N_{(cc')}$ et $a'c=a'bb''c \in N_{(a'a)} \cdot N_{(b''b)} \subseteq N_{(a'a)}$, d'après la condition (A). Il en résulte $(a, c) \in \rho_\mathfrak{n}$.

4) $\rho_\mathfrak{n}$ est régulière. Supposons $(a, b) \in \rho_\mathfrak{n}$ et soit $c \in D$:

$$ca(cb)' = cbb'a(cb)' = cb(cb)'cbb'a(cb)' \in cb[(cb)'(cb)N_{b'}](cb)'.$$

En faisant intervenir (A) puis (B), on en déduit: $ca(cb)' \in N_{(cb)(cb)'}$. De même:

$$(ca)'cb = (ca)'caa'b \in (ca)'caN_{a'a} \subseteq N_{(ca)'(ca)}.$$

Il en résulte $(ca, cb) \in \rho_\mathfrak{n}$. Pour la régularité à droite la démonstration est analogue.

5) Les classes des idempotents de $\rho_{\mathfrak{n}}$ sont les N_e. Si $a \in N_e$, $ae \in N_e$ et $a^{-1}e \in N_e$ où a^{-1} désigne l'inverse de a dans N_e. Donc $(a, e) \in \rho_{\mathfrak{n}}$. Inversement, $(a, e) \in \rho_{\mathfrak{n}}$ implique qu'il existe a' et e', inverses de a et e (e' n'est pas un idempotent en général) tels que $ae' \in N_{(ee')}$ et $a'e \in N_{(a'a)}$. On a :

$$a'a \in N_{(a'a)} \Rightarrow (a'a,\ a'e) \in \mathcal{L} \Rightarrow (a,\ a'e) \in \mathcal{L} \Rightarrow a \in Da'e \subseteq De \Rightarrow ae = a.$$

Or $ae' \in N_{(ee')}e \subseteq N_e$ (condition (A)) et $ae'e = aee'e = ae = a$; donc $a \in N_e$, ce qui achève de prouver que N_e est la $\rho_{\mathfrak{n}}$-classe de e.

6) Réciproque. Soit ρ une congruence plus fine que $\mathcal{H}$. Prenons pour $\mathfrak{n}$ la famille des ρ-classes des idempotents de D. $\mathfrak{n}$ est formée de sous-groupes normaux vérifiant (A) et (B). D'après la partie directe, les $\rho_{\mathfrak{n}}$-classes des idempotents de D sont les éléments de $\mathfrak{n}$. D'après le corollaire 3.17 du paragraphe suivant $\rho_{\mathfrak{n}} = \rho$.

Une conséquence immédiate de ce théorème est la suivante : sur un demi-groupe régulier, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{H}$ soit une congruence est que $fe = f \Rightarrow fG_e \subseteq G_f$ et $G_ef \subseteq G_f$ où G_i est le sous-groupe maximal de l'idempotent i. Si on appelle *partie groupe* de D (cf. le cas des demi-groupes compacts), le complexe Γ réunion des sous-groupes maximaux, la condition précédente signifie que $\mathcal{H}$ est régulière sur D si et seulement si $\mathcal{H}$ est régulière sur la partie groupe, c'est-à-dire :

$$(a, b) \in \mathcal{H} \cap (\Gamma \times \Gamma) \text{ et } c \in \Gamma,\ ac \text{ ou } bc \in \Gamma \text{ [resp. } ca \text{ ou } cb \in \Gamma]$$
$$\Rightarrow (ac,\ bc) \in \mathcal{H} \text{ [resp. } (ca,\ cb) \in \mathcal{H}].$$

Dans la suite, nous donnons une caractérisation du complexe réunion d'une famille de sous-groupes normaux vérifiant (A) et (B) et nous exprimons les congruences séparant les idempotents par l'intermédiaire de ce complexe, dans les cas particuliers où D est inverse et D est somme orthogonale de demi-groupes complètement 0-simples, (dans le premier cas les idempotents commutent, dans le second ils commutent peu : $ef = fe \neq 0 \Rightarrow e = f$ pour tout $e, f \in E$).

THÉORÈME 3.12. - *Soit D un demi-groupe inverse. Il y a équivalence entre :*

(1) $\mathfrak{n} = \{N_e\}_{e \in E}$ *est une famille de sous-groupes normaux vérifiant les conditions (A) et (B) du théorème* 3.11.

(2) $S = \bigcup_{e \in E} N_e$ *est un demi-treillis de groupes contenant tous les idempotents de D et S est tel que pour tout $a \in D$, $aSa^{-1} \subseteq S$.*

Pour tout demi-groupe S de D vérifiant (2), *la relation ρ_S définie par : $(a, b) \in \rho_S \Leftrightarrow a^{-1}a = b^{-1}b$ et $ab^{-1} \in S$, est une congruence séparant les idempotents, et toute telle congruence peut s'exprimer ainsi.*

DÉMONSTRATION. – (1) $\Rightarrow$ (2). $S = \cup N_e$ est un sous–demi–groupe. En effet, $eef = ef$ et d'après (B), $N_e ef \subseteq N_{(ef)}$; de même $N_{(ef)} \cdot N_f \subseteq N_{(ef)}$; donc $N_e \cdot N_f = N_e e \cdot f N_f \subseteq N_{(ef)}$. Si $a \in N_e$, pour tout $f \in E$ tel que $fe = ef = f$, on a $af = fa \in N_f$: en effet af et $fa \in N_f$, donc $faf = af = fa$. Si $a \in N_e$, pour tout $g \in E$, $eg = ge$ est un idempotent f tel que $ef = fe = f$, donc $af = fa$ et $ga = gea = fa = af = aeg = ag$. Donc E est dans le centre de S qui est aussi un demi–treillis de groupes ([2], par. 4.2). Montrons maintenant que $aSa^{-1} \subseteq S$, c'est–à–dire que $aN_e a^{-1} \subseteq N_{(aea^{-1})}$. Pour tout $x \in N_e$,

$$axa^{-1} = axea^{-1}aa^{-1} = axa^{-1}aea^{-1};$$

donc $aN_e a^{-1} = aeN_e a^{-1}aea^{-1} = aeN_e a^{-1}ae(ae)^{-1}$. Or $N_e a^{-1}ae \subseteq N_{(ae)^{-1}(ae)}$ d'après (B), donc:

$$aN_e a^{-1} = aeN_e a^{-1}aea^{-1} = aeN_{(ae)^{-1}(ae)}(ae)^{-1} \subseteq N_{(ae)(ae)^{-1}} = N_{(aea^{-1})}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit G_e un sous–groupe maximal de D. $N_e = S \cap G_e$ est un sous–groupe de D. Comme pour tout $a \in G_e$, $a(S \cap G_e)a^{-1} \subseteq aSa^{-1} \cap aG_e a^{-1} \subseteq$ $\subseteq S \cap G_e$, N_e est normal. La famille des N_e vérifie la condition (A) car l'équivalence $\mathcal{H}$ de GREEN sur S est régulière. Par ailleurs, pour tout $a \in D$ et $x \in N_{(a^{-1}a)}$:

$$axa^{-1}ax^{-1}a^{-1} = aa^{-1}axx^{-1}a^{-1} = axx^{-1}a^{-1} = aa^{-1},$$

et de même $ax^{-1}a^{-1}axa^{-1} = aa^{-1}$, ce qui prouve que $axa^{-1} \in G_{(aa^{-1})}$ et $aN_{a^{-1}a)}a^{-1} \subseteq$ $\subseteq N_{(aa^{-1})}$. Montrons enfin que $\rho_S = \rho_{\mathfrak{N}}$, où $\mathfrak{N}$ est la famille des N_e définie ci-dessus. Si $(a, b) \in \rho_{\mathfrak{N}}$, $ab^{-1} \in N_{(bb^{-1})} \subseteq S$ et $(a, b) \in \mathcal{H}$. D'après le théorème de CLIFFORD-MILLER ([18] et [2] p. 60) sur la localisation des inverses d'un élément régulier, il en résulte $a^{-1}a = b^{-1}b$. Donc $(a, b) \in \rho_S$ et $\rho_{\mathfrak{n}} \subseteq \rho_S$. Inversement si $(a, b) \in \rho_S$, $a^{-1}a = b^{-1}b$ et $ab^{-1} \in S$ donc $(a, b) \in \mathcal{L}$ et $ab^{-1} \in N_e$. On en déduit $(e, bb^{-1}) \in \mathcal{L}$ d'où $e = bb^{-1}$ et $ab^{-1} \in N_{(bb^{-1})}$. On a aussi $(a^{-1}, b^{-1}) \in \mathcal{R}$, d'où $(aa^{-1}, e) \in \mathcal{R}$ et $aa^{-1} = bb^{-1}$. Finalement,

$$a^{-1}b = a^{-1}ba^{-1}a \in a^{-1}N_{(bb^{-1})}a \subseteq N_{(a^{-1}a)} \quad \text{et} \quad (a, b) \in \rho_{\mathfrak{n}},$$

D'après le corollaire 3.7, ce théorème 3.12 décrit en fait toutes les congruences sur un demi–groupe inverse plus fines que $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{L}$. En particulier:

COROLLAIRE 3.13 [13]. – *La congruence maximum μ séparant les idempotents sur un demi–groupe inverse D, est définie par*: $(a, b) \in \mu \Leftrightarrow a^{-1}a = b^{-1}b$ *et* $ab^{-1} \in E\zeta$ *où* $E\zeta = \{x \in D : xe = ex$ *pour tout* $e \in E\}$ *est le centralisateur de* E.

En effet, $E\zeta$ est un demi–treillis de groupes contenant E et pour tout $a \in D$, $x \in E\zeta$ et $e \in E$:

$$e(axa^{-1}) = (eaa^{-1})axa^{-1} = (aa^{-1}e)axa^{-1} = a(a^{-1}ea)xa^{-1} = ax(a^{-1}ea)a^{-1} =$$
$$= axa^{-1}(eaa^{-1}) = axa^{-1}e,$$

donc $a(E\zeta)a^{-1} \subseteq E\zeta$.

COROLLAIRE 3.14. – *Dans un demi–groupe inverse D, les sous–demi–groupes inverses qui contiennent tous les idempotents, sont demi–treillis de groupes et vérifient* $aSa^{-1} \subseteq S$ *pour tout* $a \in D$, *forment un treillis complet modulaire dont E est l'élément nul et* $E\zeta$ *l'élément universel.*

Un demi–groupe est somme orthogonale de demi–groupes complètement 0–simples si et seulement si il est régulier et tous ses idempotents sont primitifs (théorème 2.9). Cette dernière condition est équivalente à : $ef = fe \neq 0 \Rightarrow e = f$ pour tout $e, f \in E$. (Si $ef = fe \neq 0$, ef est un idempotent $g \neq 0$ tel que $ge = eg = g = gf = fg$; d'où $e = g = f$). Dans le théorème suivant, pour éviter des complications d'énoncé, nous supposons que les demi–groupes complètement 0–simples qui interviennent sont sous forme de demi–groupes de matrices de REES $\mathfrak{M}^0(G ; I, \Lambda ; P)$; nous supposons de plus que la matrice P a été normalisée ([2], p. 95) de façon que G apparaisse effectivement comme un sous–groupe maximal de $\mathfrak{M}^0(G ; I, \Lambda ; P)$ (par exemple, on suppose que I et Λ ont un indice 1 en commun et que $H_{11} = G$.

THÉORÈME 3.15. – *Soit D une somme orthogonale de demi–groupes complétement 0–simples* $\mathfrak{M}^0(G_\alpha ; I_\alpha, \Lambda_\alpha ; P_\alpha)$. *Il y a équivalence entre :*

(1) *K est la réunion d'une famille* $\mathfrak{n}$ *de sous–groupes normaux de D vérifiant les conditions (A) et (B) du théorème* 3.11 ;

(2) $K \setminus 0$ *est un complexe réflectif* (*i.e.* $ab \in K \setminus 0 \Rightarrow ba \in K \setminus 0$ *pour tout* $a, b \in D$) *et* $K \cap G_\alpha$ *est un sous–groupe de* G_α.

Pour un complexe K vérifiant (2), *la relation* ρ_K *définie par :* $(a, b) \in \rho_K \Leftrightarrow$ *il existe a' et b' inverses de a et b tels que* $aa' = bb'$ *et* $ab' \in K$, *est une congruence séparant les idempotents et toute telle congruence est de ce type.*

DÉMONSTRATION. – (1) $\Rightarrow$ (2). Cela résulte du théorème 3.10 et des propriétés des sommes orthogonales de demi–groupes complètement 0–simples.

(2) $\Rightarrow$ (1). $K \cap G_\alpha$ est un sous–groupe normal de G_α, car pour $a \in G_\alpha$ et $x \in K \cap G_\alpha$, $x = xaa^{-1} \in K \setminus 0$; la réflectivité de K entraîne alors $a^{-1}xa \in K \cap G_\alpha$. Dans la suite nous nous plaçons dans un demi–groupe $\mathfrak{M}^0(G_\alpha ; I_\alpha, \Lambda_\alpha ; P_\alpha)$ fixé, c'est–à–dire dans un facteur principal de D. Dans l'écriture des matrices de REES nous supprimons l'indice α, et nous notons par e l'élément unité du groupe G_α. On remarque d'abord que :

(i) $(x ; 1, 1) \in K \Rightarrow (xp_{\lambda i}^{-1} ; i, \lambda) \in K$ pour toute entrée $p_{\lambda i}$ de P telle que $p_{\lambda i} \neq 0$ et pour tout $x \in G$.

(ii) $(x ; i, \lambda) \in K$ et $p_{\lambda i} \neq 0 \Rightarrow (xp_{\lambda i} ; 1, 1) \in K$ pour tout $x \in G$.

En effet, $(x ; 1, 1) = (p_{\lambda i}^{-1} ; 1, \lambda)\ (e ; i, 1)\ (x ; 1, 1) \in K \setminus 0$ implique

$$(e, i, 1)\ (x ; 1, 1)\ (p_{\lambda i}^{-1} ; 1, \lambda) = (xp_{\lambda i}^{-1} ; i, \lambda) \in K \setminus 0.$$

De même $(x ; i, \lambda) = (e ; i, 1)\ (xp_{\lambda i} ; 1, 1)\ (p_{\lambda i}^{-1} ; 1, \lambda) \in K \setminus 0$ implique

$$(p_{\lambda i}^{-1} ; 1, \lambda)\ (e ; i, 1)\ (xp_{\lambda i} ; 1, 1) = (xp_{\lambda i} ; 1, 1) \in K \setminus 0.$$

L'application $(x;\ 1,\ 1) \to (e;\ i,\ 1)\ (x;\ 1,\ 1)\ (p_{\lambda i}^{-1};\ i,\ \lambda)$ définit un isomorphisme de G sur G_f avec $f = (p_{\lambda i}^{-1};\ i,\ \lambda)$ et d'après (i), $K \cap G_f$ est un sous-groupe normal de G_f isomorphe à $K \cap G$. De plus, si $(a;\ i,\ \lambda) \in K \setminus 0$, alors $p_{\lambda i} \neq 0$, sinon en prenant j tel que $p_{\lambda j} \neq 0$, $(a;\ i,\ \lambda) = (a;\ i,\ \lambda)\ (p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda) \in K \setminus 0$ d'où $(p_{\lambda j}^{-1};\ j,\ \lambda)\ (a;\ i,\ \lambda) = 0 \in K \setminus 0$, ce qui est absurde.

K est donc réunion de sous-groupes normaux isomorphes et de $\{0\}$: il vérifie (B). En ce qui concerne (A), montrons par exemple que $fg = g$ implique $N_f g \subseteq N_g$. Si $g = 0$, c'est évident $(N_0 = \{0\})$. Si $g \neq 0$, $fg = g$ est équivalent à $(f,\ g) \in \mathcal{R}$; donc $f = (p_{\lambda i}^{-1};\ i,\ \lambda)$ et $g = (p_{\mu i};\ i,\ \mu)$. Pour tout élément $(a;\ i,\ \lambda) \in N_f$, $(a;\ i,\ \lambda)\ (p_{\mu i}^{-1};\ i,\ \mu) = (a p_{\lambda i} p_{\mu i}^{-1};\ i,\ \mu)$. D'après (ii), $(a p_{\lambda i};\ 1,\ 1) \in K$ et d'après (i) $(a p_{\lambda i} p_{\mu i}^{-1};\ i,\ \mu) \in K$, ce qui prouve $N_f g \subseteq N_g$.

Désignons par $\mathfrak{n}$ la famille des sous-groupes normaux formant K. Si $(a, b) \in \rho_{\mathfrak{n}}$, alors $(a, b) \in \mathcal{H}$ et il existe a' tel que $aa' = bb'$, $a'a = b'b$ et $ab' \in K$ (théorème de CLIFFORD-MILLER et définition de $\rho_{\mathfrak{n}}$) d'où $(a, b) \in \rho_K$. Inversement, si $(a, b) \in \rho_K$, $aa' = bb'$ et $a'a = b'b$ impliquent $(a, b) \in \mathcal{H}$ et $(a', b') \in \mathcal{H}$. Comme $ab' \in K$, $ab' \in N_e$ et $(ab', e) \in \mathcal{H}$. Or $(ab', aa') \in \mathcal{R}$ et $(ab', bb') \in \mathcal{L}$; de $aa' = bb'$ on déduit alors $e = aa' = bb'$, d'où $ab' \in N_{bb'}$. Il reste à montrer que $a'b \in K$; il en résultera comme précédemment $a'b \in N_{a'a}$.

Si $ab' = 0$, $a = b = 0$ et $a'b = 0$. Si $ab' \neq 0$, en posant $a = (u;\ i,\ \lambda)$ et $b = (v;\ i,\ \lambda)$, b' est de la forme $(p_{\lambda j}^{-1} v^{-1} p_{\mu i}^{-1};\ j,\ \mu)$ et $a' = (p_{\lambda j}^{-1} u^{-1} p_{\mu i}^{-1};\ j,\ \mu)$ avec $p_{\lambda j} \neq 0$ et $p_{\mu i} \neq 0$.

Dans ces conditions $ab' = (uv^{-1} p_{\mu i}^{-1};\ i,\ \mu) \in K$. D'après (i) et (ii) c'est équivalent à $(uv^{-1};\ 1,\ 1) \in K$. Puisque $a'b = (p_{\lambda j}^{-1} u^{-1} v;\ j,\ \lambda)$, pour montrer que $a'b \in K$, il suffit d'établir $(p_{\lambda j}^{-1} u^{-1} v p_{\lambda j};\ 1,\ 1) \in K$. Or ceci résulte de $(uv^{-1};\ 1,\ 1) \in K$ et du fait que $K \cap G$ est un sous-groupe normal. Donc $(a, b) \in \rho_{\mathfrak{n}}$ et $\rho_K = \rho_{\mathfrak{n}}$.

Pour les demi-groupes réguliers dont tous les idempotents sont primitifs, la congruence maximale séparant les idempotents est l'équivalence $\mathcal{H}$ de GREEN. Les complexes K vérifiant la condition (2) du théorème 3.15 forment un treillis complet modulaire d'élément nul l'ensemble E des idempotents, et d'élément universel, la réunion des $\mathcal{H}$-classes groupes, c'est-à-dire la partie groupe Γ de D. Dans le cas d'un demi-groupe complètement 0-simple, $\mathfrak{M}^0(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$ le résultat précédent prend la forme suivante: *les complexes réflectifs engendrés par les sous-groupes du groupe de base forment un treillis complet modulaire.*

Les résultats de ce paragraphe montrent que la notion de normalité dans certains demi-groupes réguliers peut être envisagée sous un double aspect: ce qui joue le rôle de sous-groupe normal dans un groupe est, ou bien une famille convenable de sous-groupes normaux des sous-groupes maximaux, ou bien le complexe réunion de ces sous-groupes normaux. Ici figure une restriction: nous n'avons considéré que les congruences séparant les idempotents. Nous verrons dans la partie IV que dans le cas des demi-groupes

complètement 0-simples, ce double point de vue se retrouve sans restriction sur les congruences considérées.

4. – Congruences et homomorphismes sur un demi-groupe régulier.

Dans ce paragraphe sont rassemblés des résultats de caractère général concernant les congruences sur un demi-groupe régulier et les homomorphismes d'un demi-groupe quelconque sur un demi-groupe régulier.

Soient un demi-groupe quelconque et ρ une congruence sur D telle que le demi-groupe quotient D/ρ soit régulier. Dans D/ρ considérons un système de représentants $\{k\}$ des $\mathcal{H}$-classes groupes autres que la classe zéro (si elle existe). Si l'on désigne par φ l'homomorphisme canonique $\varphi: D \to D/\rho$, chacun des représentants k admet pour image réciproque un complexe $K = \varphi^{-1}(k)$ de D. La famille des complexes K images réciproques des divers représentants k sera désignée par «***famille représentative dans*** D ***des*** $\mathcal{H}$***-classes groupes de*** D/ρ» ou brièvement par «***famille*** g_ρ***-représentative***» (la lettre g abréviant le mot «groupe»). On dira également «famille g_φ-représentative», lorsque c'est l'homomorphisme φ qui est donné directement.

THÉORÈME 3.16. – *Soit D un demi-groupe régulier. Si deux congruences ρ et σ sur D sont telles qu'une famille g_ρ-représentative et une famille g_σ-représentative coïncident alors $\rho = \sigma$.*

DÉMONSTRATION. – *a*) Supposons que σ soit l'égalité sur D et que la famille g_σ-représentative corresponde à un système de représentants formé des idempotents non nuls. La ρ-classe de zéro (si elle existe) est un idéal bilatère I. S'il existe $a \in I$, $a \neq 0$ alors $aa' \in I$ et $aa' \neq 0$ (a' est un inverse de a); mais la σ-classe de aa' ne contient que aa', donc aussi la ρ-classe de aa' qui est I; il en résulte $aa' = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $a \neq 0$; donc $I = (0)$. La ρ-classe d'un idempotent quelconque e est alors $\{e\}$. D'après le théorème 3.6, $\rho \subseteq \mathcal{H}$.

Si $(a, b) \in \rho$, $(ab', bb') \in \rho$ d'où $ab' = bb'$ et $ab'b = b$. Comme $(a, b) \in \mathcal{H}$ on a aussi $ab'b = a$ d'où $a = b$ et $\rho = \sigma$.

b) Supposons que σ soit l'égalité sur D et que la famille g_σ-représentative soit relative à un système quelconque de représentants des $\mathcal{H}$-classes groupes. D'abord $\rho \subseteq \mathcal{H}$: en effet si $(e, f) \in \rho$ pour deux idempotents $e, f \in D$, et si e, par exemple, est nul et f non nul, en désignant par k le représentant de H_f (H_f est la $\mathcal{H}$-classe de f) on obtient $(0, k) \in \rho$ et aussi $(0, k) \in \sigma$ ce qui est impossible ($k \neq 0$). Si e et f sont tous deux non nuls: $(e, f) \in \rho \Rightarrow (ek, fk) \in \rho$. Comme $k = fk$, par hypothèse $(k, fk) \in \rho$; d'où $(k, ek) \in \rho$. La ρ-classe de k coïncide avec la σ-classe de k (réduite à k) donc $k = ek$. On démontre de même $k = ke$; il en résulte $k \in eD \cap De$ et $H_k = H_f \leq H_e$. En permutant e et f on obtient de même $H_e \leq H_f$ d'où $(e, f) \in \mathcal{H}$. Il s'ensuit (théorème 3.6) que

$\rho \subseteq \mathcal{H}$. Supposons maintenant que $(a, f) \in \rho \subseteq \mathcal{H}$ pour un élément a quelconque de D. Comme précédemment, $(ak, fk) \in \rho$ et $(ka, kf) \in \rho$ impliquent $ak = ka = k$. Mais $(a, k) \in \mathcal{H}$, donc $a = f$ et les classes des idempotents de ρ et σ coïncident; d'après a), $\rho = \sigma$.

c) Supposons σ et ρ quelconques et la famille g-représentative commune à σ et ρ quelconque. On vérifie sans difficulté que la famille g-représentative commune à ρ et σ est aussi commune à ρ et $\rho \cap \sigma$: cela résulte du fait qu'une $\mathcal{H}$-classe groupe de $D/\rho \cap \sigma$ a pour image homomorphe canonique une $\mathcal{H}$-classe groupe de D/ρ. Dans $\bar{D} = D/\rho \cap \sigma$ on définit une congruence $\bar{\rho}$ par:

$$(a, b) \in \rho \Leftrightarrow \text{il existe } a \in a \text{ et } b \in b \text{ tels que } (a, b) \in \rho.$$

Soit k un des représentants des $\mathcal{H}$-classes groupes de $\bar{D}$ associés à la famille g-représentative commune; si $(\bar{a}, \bar{k}) \in \bar{\rho}$, il existe $a \in \bar{a}$ et $k \in \bar{k}$ tels que $(a, k) \in \rho$. Par hypothèse $(a, k) \in \sigma$, d'où $a = \bar{k}$. Dans $\bar{D}$ les $\bar{\rho}$-classes des représentants $\bar{k}$ sont les mêmes que les classes de l'égalité; d'après b), $\bar{\rho}$ est l'égalité et $\rho = \rho \cap \sigma$. De même $\sigma = \rho \cap \sigma$ et $\rho = \sigma$.

COROLLAIRE 3.17 ([23]) - *Soit D un demi-groupe régulier; soient ρ et σ deux congruences sur D. Si dans D les classes des idempotents non nuls de D/ρ et de D/σ coïncident, $\rho = \sigma$.*

Du théorème 3.16, il résulte également que si φ est un homomorphisme d'un demi-groupe D *quelconque* sur un demi-groupe régulier, la congruence d'homomorphisme est déterminée avec unicité par la donnée des classes d'un système de représentants des $\mathcal{H}$-classes groupes de $\varphi(D)$ c'est-à-dire d'une famille g_φ-représentative). Plus précisément dans un demi-groupe D quelconque, soit $\mathfrak{K}$ une famille de complexes K_i $(i \in I)$. Désignons par P_{K_i} [resp. ${}_{K_i}P$] l'équivalence principale [5] à droite [resp. à gauche] définie par K_i:

$$(a, b) \in P_{K_i} \Leftrightarrow \{ ax \in K_i \Leftrightarrow bx \in K_i \}.$$

Posons $P_{\mathfrak{K}} = \bigcap_{i \in I} P_{K_i}$, ${}_{\mathfrak{K}}P = \bigcap_{i \in I} {}_{K_i}P$ et $P(\mathfrak{K}) = P_{\mathfrak{K}} \cap {}_{\mathfrak{K}}P$.

PROPOSITION 3.18. - *Si φ est un homomorphisme d'un demi-groupe D quelconque sur un demi-groupe régulier $\bar{D}$, et si $\mathfrak{K}$ est une famille g_φ-représentative des $\mathcal{H}$-classes groupes de $\bar{D}$, la congruence d'homomorphisme coïncide avec $P(\mathfrak{K})$.*

DÉMONSTRATION. - Soit ρ la congruence d'homomorphisme. $\mathfrak{K}$ est une famille de complexes saturés pour ρ: si $(a, b) \in \rho$ et si $ax \in K_i \in \mathfrak{K}$ alors $(ax, bx) \in \rho$ et $bx \in K_i$; inversement on a: $bx \in K_i \Rightarrow ax \in K_i$; pour tout $i \in I$, $K_i \cdot a = K_i \cdot b$. De même, $K_i \cdot .a = K_i \cdot .b$ et $(a, b) \in P(\mathfrak{K})$.

([23]) PRESTON a obtenu un résultat analogue avec l'hypothèse de la coïncidence des classes des idempotents [12]. La restriction «non nuls» a son intérêt dans la suite.

Inversement, si $(a, b) \in P(\mathcal{K})$, dans $D[\varphi(a), \varphi(b)] \in P(\mathcal{K})$ où $\mathcal{K}$ est la famille des complexes réduits à un élément représentant une $\mathcal{H}$-classe groupe. Le fait que $\varphi(a) = \varphi(b)$ résulte alors du lemme suivant :

LEMME 3.19. - *Dans un demi-groupe D régulier, soit $\mathcal{K} = \{\{k_i\}\}$ $(i \in I)$ un système de représentants k_i des $\mathcal{H}$-classes groupes. L'équivalence $P(\mathcal{K})$ coïncide avec l'égalité.*

DÉMONSTRATION. - Supposons $(a, b) \in P(\mathcal{K})$. Si $a \neq 0$, en désignant par a' un inverse de a, $aa' = e \in E \setminus (0)$. Notons k_e le représentant de la $\mathcal{H}$-classe groupe H_e. On a $aa'k_e = k_e$ d'où $ba'k_e = k_e$. Il en résulte :

$$a = aa'a = k_e k_e^{-1} a = ba'k_e k_e^{-1} a = ba'a.$$

Donc $b \neq 0$ et $a \in bD = bb'D$, ce qui implique $bb'a = a$, en désignant par b' un inverse de b. En notant k_f le représentant de H_f où $f = b'b \in E \setminus (0)$, il vient $k_f b'b = k_f$, d'où $k_f b'a = k_f$ et $k_f^{-1} k_f b'a = b'a = b'b$. Ceci entraîne $bb'a = bb'b = b$, d'où $a = b$.

COROLLAIRE 3.20. - *Si φ est un homomorphisme d'un demi-groupe D quelconque sur un demi-groupe inverse D et si $\mathcal{K}$ est une famille g_φ-représentative des $\mathcal{H}$-classes groupes de D, la congruence d'homomorphisme coïncide avec $P_{\mathcal{K}} = {}_{\mathcal{K}}P$.*

DÉMONSTRATION. - D'après la proposition 3.18 et le lemme 3.19, il suffit de montrer que dans un demi-groupe inverse $P_{\mathcal{K}}$ par exemple ($\mathcal{K}$ est une famille formée par un système de représentants des $\mathcal{H}$-classes groupes de D) coïncide avec l'égalité ; si $(a, b) \in P_{\mathcal{K}}$, pour $a \neq 0$ il existe a^{-1} tel que $aa^{-1} = e \in E \setminus (0)$ et $aa^{-1}k_e = k_e$ (mêmes notations que pour le lemme 3.18) implique $ba^{-1}k_e = aa^{-1}k_e = k_e$. Donc $b \neq 0$ et $ba^{-1}k_e k_e^{-1} = aa^{-1}k_e k_e^{-1} = aa^{-1}$ c'est-à-dire $ba^{-1} = aa^{-1}$. On démontre de même $ab^{-1} = bb^{-1}$; d'où $(a, b) \in \mathcal{R}$ et $aa^{-1}b = b$. Par ailleurs $ba^{-1}b = aa^{-1}b = b$ et $a^{-1}ba^{-1} = a^{-1}$; par suite $a^{-1} = b^{-1}$ et $a = b$.

COROLLAIRE 3.21. ([5], p. 258) - *Si φ est un homomorphisme d'un demi-groupe D quelconque sur un groupe avec zéro la congruence d'homomorphisme coïncide avec $P_K = {}_K P$ où K est l'une des classes non nulles de cette congruence.*

Le cas des homomorphismes d'un demi-groupe quelconque sur un demi-groupe complètement 0-simple sera examiné en détail dans le partie IV.

Dans le cas général (l'image est un demi-groupe régulier), entre deux familles g_φ-représentatives $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ on établit sans difficulté les relations suivantes :

1) Pour tout $K \in \mathcal{K}$ il existe $K' \in \mathcal{K}'$, $a, b \in D$ tels que $K \subseteq (K'.a) \cap (K'.b)$

2) Si $\mathcal{K}' = \mathcal{S}$ est une famille de sous-demi-groupes, pour tout $K \in \mathcal{K}$, il existe $S \in \mathcal{S}$ et $a \in D$ tels que $K \subseteq (S.a) \cap (S.a)$.

En théorie des demi-groupes il est important de savoir si un demi-groupe donné a ou non une image homomorphe maximale d'un type donné (cf. par exemple, la théorie des représentations d'un demi-groupe par des matrices sur un corps) et dans l'affirmative d'indiquer des expressions simples des congruences d'homomorphismes correspondantes. Un demi-groupe régulier a «en général» une image homomorphe maximale de type un demi-groupe régulier vérifiant des conditions supplémentaires usuelles; par exemple:

PROPOSITION 3.22. - *Tout demi-groupe régulier a une image homomorphe maximale réunion de groupes.*

DÉMONSTRATION. - Un demi-groupe régulier est réunion de groupes, si et seulement si il vérifie $aD = a^2D$ pour tout $a \in D$ (ou ce qui est équivalent $Da = Da^2$ pour tout $a \in D$; [4]), c'est-à-dire si et seulement si $a = a^2(a^2)'a$ où $(a^2)'$ est un inverse de a^2. Si ρ_i est une congruence sur D telle que D/ρ_i soit réunion de groupes, pour tout $a \in D$ et pour tout $(a^2)'$ inverse de a^2 on a: $[a, a^2(a^2)'a] \in \rho_i$. L'intersection de toutes les congruences ρ_i (il en existe au moins une: la congruence universelle) ayant la propriété précédente fournit l'image homomorphe maximale réunion de groupes.

Lorsque le demi-groupe image homomorphe a une structure plus particulière, il est possible de préciser:

THÉORÈME 3.23. - *Soit D un demi-groupe régulier. Désignons par β, γ, η les plus fines congruences telles que D/β soit une bande (demi-groupe idempotent), D/γ une bande rectangulaire (demi-groupe idempotent tel que $aba = a$, pour tout a et b), D/η un demi-treillis, et par ξ^* la congruence engendrée par une relation ξ sur D.*

a) $[\beta \cap (E \times E)]^*$ *est la plus fine des congruences ρ telle que D/ρ soit une bande de groupes.*

b) $[\gamma \cap (E \times E)]^*$ *est la plus fine des congruences ρ telle que D/ρ soit complètement simple.*

c) $[\eta \cap (E \times E)]^*$ *est la plus fine des congruences ρ telle que D/ρ soit un demi-treillis de groupes.*

d) $(E \times E)^*$ *est la plus fine des congruences ρ telle que D/ρ soit un groupe.*

DÉMONSTRATION. -. Une démonstration a été donnée dans [5'] pour le cas *a*). Nous ferons une démonstration globale pour *a*), *b*), *c*), *d*) en désignant par δ l'une quelconque des congruences β, γ, η, $D \times D$ (congruence universelle) et en désignant par demi-groupe de type T_δ, soit une bande de groupes ($\delta = \beta$), soit un demi-groupe complètement simple ($\delta = \gamma$), soit un demi-treillis de groupes ($\delta = \eta$), soit un groupe ($\delta = D \times D$).

Posons $\alpha = \delta \cap (E \times E)$ et $\pi = \alpha^*$. D'abord D/π est réunion de groupes de type T_δ: montrons qu'en effet la plus fine congruence ρ sur D/π telle que

$(D/\pi)/\rho$ soit de type T_δ, coïncide avec l'équivalence $\mathcal{H}$ de GREEN. Sur $D/\pi = \bar{D}$ la plus fine congruence ρ telle que $\bar{D}/\rho$ soit de type T_δ est $\bar{\delta}$ definie par:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\delta} \Leftrightarrow \text{il existe } x \in \bar{x},\ y \in \bar{y} \text{ tels que } (x, y) \in \delta.$$

Soient $\bar{e}$, $\bar{f}$ deux idempotents de $\bar{D}$ tel que $(\bar{e}, \bar{f}) \in \bar{\delta}$. Il existe e, f idempotents de D tels que $e \in \bar{e}$, $f \in f$ (proposition 3.5) et $(e, f) \in \delta$. Donc

$$(e, f) \in \delta \cap (E \times E) \subseteq \pi \text{ d'où } \bar{e} = f.$$

La congruence $\bar{\delta}$ est donc contenue dans $\mathcal{H}$ (théorème 3.6). Comme δ est une congruence idempotente, chaque $\mathcal{H}$-classe de D est un groupe ([2], théorème 2.16). Par ailleurs on vérifie sans difficulté que chaque $\mathcal{H}$-classe est contenue dans une δ-classe (cela résulte du fait que sur un demi-groupe quelconque $\mathcal{H}^*$ est contenue dans la plus fine congruence idempotente; cf. [5'], théorème 1.3). Donc $\mathcal{H} = \delta$, ce qui prouve que D/π est de type T_δ. Soit ρ une congruence sur D telle que D/ρ soit de type T_δ. Pour montrer que $\pi \subseteq \rho$, il suffit d'établir $\alpha \subseteq \rho$. Soit $(e, f) \in \alpha = \delta \cap (E \times E)$ et soit δ' la plus fine congruence de type T_δ sur D/ρ. La congruence δ_1 définie sur D par $(x, y) \in \delta_1 \Leftrightarrow (x\rho, y\rho) \in \delta'$ est une congruence de type T_δ et $\delta \subseteq \delta_1$. Par suite $(e, f) \in \alpha \subseteq \delta \subseteq \delta_1$ et $(e\rho, f\rho) \in \delta'$. Comme D/ρ est réunion de groupes de type T_δ: $(e\rho, f\rho) \in \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est l'équivalence de GREEN sur D/ρ. Il en résulte $e\rho = f\rho$ c'est-à-dire $(e, f) \in \rho$.

Signalons que sur un demi-groupe quelconque la congruence η a été étudiée notamment par YAMADA [37], PETRICH [21]. La congruence γ étudiée également par PETRICH, sera mise en évidence dans la partie IV. Sur un demi-groupe régulier on a $\mathcal{H}^* \subseteq \beta \subseteq \mathcal{R}^* \cap \mathcal{L}^*$ et $\eta = \mathcal{D}^* = \mathcal{J}^*$. [5'].

La plupart des résultats qui précèdent reposent sur la propriété de $\mathcal{H}$-régularité d'un demi-groupe régulier. Pour certains demi-groupes réguliers d'autres propriétés des congruences reposent sur la $\mathcal{D}$-régularité. Par exemple, dans [17] MALCEV a donné une description complète des congruences du demi-groupe régulier $\mathcal{C}_\Omega$ des applications de Ω dans Ω. Certains des résultats de MALCEV, en particulier tous ceux qui concernent le cas où Ω est fini peuvent s'obtenir ou s'exprimer de façon plus simple en utilisant la $\mathcal{H}$-régularité. Indiquons sans en donner les démonstrations [24], les lemmes intermédiaires et le résultat final concernant le cas $|\Omega| < \infty$. On démontre successivement:

1) La seule congruence sur $\mathcal{C}_\Omega$ (Ω quelconque) séparant les idempotents est l'égalité.

2) Soit ρ une congruence propre sur $\mathcal{C}_\Omega$ (Ω quelconque). Le noyau K de $\mathcal{C}_\Omega$ est ρ-indivisible.

[24] Dans la plupart des cas les démonstrations se ramènent à établir des propriétés portant sur les idempotents.

Il en résulte que pour une congruence propre ρ sur $\mathcal{T}_\Omega$ la classe contenant K est un idéal bilatère I_N formé des transformations de rang inférieur au cardinal N, ce qui permet de ramener le problème des congruences sur $\mathcal{T}_\Omega$ à celui des congruences sur $\mathcal{T}_\Omega/I_N$ pour lesquelles la classe zéro a un seul élément.

3) Toute congruence sur $\mathcal{T}_\Omega/I_N$ ayant une classe zéro réduite à un seul élément est plus fine que $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}$. Dans le cas où N est fini toute telle congruence est plus fine que $\mathcal{H}$.

4) Pour une congruence ρ sur $\mathcal{T}_\Omega/I_N$, les classes des idempotents non nuls sont précisées de la façon suivante:

a) Si $|\Omega e| = N$, la ρ-classe de e est isomorphe à un sous-groupe normal du groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$ (c'est une conséquence du fait que sur un demi-groupe régulier quelconque une congruence $\rho \subseteq \mathfrak{D}$ sépare les idempotents d'une $\mathfrak{D}$-classe particulière Δ, si et seulement si $\rho \cap (\Delta \times \Delta) \cap \mathcal{H} \cap (\Delta \times \Delta)$: les classes des idempotents de Δ sont alors des sous-groupes normaux isomorphes entre eux).

b) Si $|\Omega e| > N$, la ρ-classe de e est $\{e\}$.

5) Toute congruence sur $\mathcal{T}_\Omega$ (Ω de cardinal fini) est de la forme: $\rho(N, \mathfrak{N}_N) = i \cup (I_N \times I_N) \cup \rho(\mathfrak{N}_N)$ où N est un entier, $\mathfrak{N}_N$ un sous-groupe normal du groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$ et $(a, b) \in \rho(\mathfrak{N}_N) \Leftrightarrow (a, b) \in I_{N+1}/I_N$ et $(a, b) \in \bar{\rho}(\mathfrak{N}_N)$ où $\bar{\rho}(\mathfrak{N}_N)$ est une congruence plus fine que $\mathcal{H}$ sur I_{N+1}/I_N définie par des classes d'idempotents isomorphes à $\mathfrak{N}_N$ (cf. théorème 3.11).

CHAPITRE IV.

Demi-groupes complètement 0-simples.

1. – Sur la définition des demi-groupes complètement 0-simples.

Les demi-groupes complètement 0-simples sont apparus en théorie des demi-groupes avec la détermination par SUSKEWITCH de la structure du noyau (idéal bilatère minimum) d'un demi-groupe fini [33]. A la suite des travaux de REES [26], la définition adoptée pour un tel demi-groupe est habituellement la suivante: D est dit complètement 0-simple s'il est 0-simple (c'est-à-dire $D^2 \neq (0)$ et (0) est le seul idéal bilatère propre de D) et s'il contient au moins un idempotent primitif. Pour un demi-groupe complètement simple la définition est la même sans les restrictions concernant le zéro. REES a démontré qu'un demi-groupe est complètement 0-simple si et seulement si

il est isomorphe à un demi-groupe de matrices de format $I \times \Lambda$ sur un groupe G avec zéro, $\mathfrak{M}^0(G\,;\, I,\, \Lambda\,;\, P) = \{(a\,;\, i,\, \lambda)\,;\; a \in G\,;\; i \in I,\; \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$ avec l'opération

$$(a\,;\, i,\, \lambda)\,(b\,;\, j,\, \mu) = (ap_{\lambda j}b\,;\, i,\, \mu) \quad \text{si} \quad p_{\lambda j} \neq 0,$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad p_{\lambda j} = 0,$$

(les éléments $p_{\lambda j}$ sont les entrées d'une matrice P, dite médiane, de format $\Lambda \times I$ sur $G' = G \cup \{0\}$) et $(a\,;\, i,\, \lambda)0 = 0(a\,;\, i,\, \lambda) = 0$.

Avec McCOY ([25]), nous dirons qu'un idéal bilatère I d'un demi-groupe est *premier*, si pour tout $a,\, b \in D$, $aDb \subseteq I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$. On vérifie sans difficulté que : I premier $\Leftrightarrow$ {pour tout M, N, idéaux bilatères de D, $MN \subseteq I \Rightarrow M \subseteq I$ ou $N \subseteq I$} $\Leftrightarrow$ {pour tout $a,\, b \in D$, $D^1aD^1 \cdot D^1bD^1 \subseteq I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$. Un demi-groupe ayant un zéro premier et non réduit à zéro sera dit *premier*.

THÉORÈME 4.1. - *Un demi-groupe D est complètement 0-simple si et seulement si il vérifie les systèmes équivalents* I *ou* II :

I
1) *D est premier* ;
2) *pour tout $a \in D$, il existe e, $f \in D$ tels que $ea = af = a$* ;
3) *pour tout $a \neq 0$, e, $f \in D$ vérifiant* 2) *il existe a'* ([26]) *tel que $aa' = e$ et $a'a = f$.*

II
1) *D est premier* ;
2) *D est 0-inversé ($\forall\, a \in D$, $a \neq 0$, $\exists\, x$ tel que $(ax)^2 = ax \neq 0$; cf. définition* 3.2) ;
3) *D est faiblement 0-simplifiable c'est-à-dire : $ax = bx \neq 0$ et $ya = yb \neq 0 \Rightarrow a = b$.*

DÉMONSTRATION. - *a*) Si D vérifie I, il est 0-simple. Montrons en effet que pour tout $a \in D$, $a \neq 0$, $DaD = D$ ([2], lemme 2.28) Soient $b \in D$, $b \neq 0$, e et $f \in D$ tels que $ea = af = a$, g et $h \in D$ tels que $gb = bh = b$. D'après I, 3), e, f, g, $h \in E \setminus 0$ (pour e par exemple, $e^2 = eaa' = aa' = e$). Pour $g \neq 0$ et $a \neq 0$, il existe $x \in D$ tel que $gxa \neq 0$ (d'après I, 1)) puis $y \in D$ tel que $gxayh = u \neq 0$. On a $gu = uh = u$; d'après I, 3), il existe donc un élément u' tel que $uu' = g$ et $u'u = h$; donc $uu'b = gb = b$, soit $gxayhu'b = b$, d'où $b \in DaD$ et $D = DaD$.

D a un idempotent primitif : soit $f \neq 0$ tel que $f^2 = f$ et $e = e^2$ tel que $ef = fe = f$; d'après I, 3), il existe x tel que $fx = e = xf$; or $fx = e \Rightarrow fe = e$, d'où $e = f$.

([25]) cf. N.H. McCOY, Prime ideals in general rings, Amer. J. Math. 71 (1949) p. 823-833

([26]) Cet élément a' est alors unique.

b) Un demi-groupe complètement 0-simple vérifie II ; on le voit sans difficulté par des calculs élémentaires sur le demi-groupe de matrices de REES associé à D.

c) II entraîne I : Pour montrer la propriété I, 2), d'après II, 2), si $a \neq 0$ il existe x tel que $ax \in E \setminus 0$. En posant $y = xax$, on a $ay = e \in E \setminus 0$ et $ya = f \in E \setminus 0$. D'après II, 3), $ayay = ay \neq 0$ et $yaya = ya \neq 0$ entraînent $aya = a$, c'est-à-dire $ea = af = a$.

Pour montrer I, 3), supposons $e_1 a = a f_1 = a \neq 0$. D'après ce qui précède, on a $e_1 e = e_1 ay = ay = e$, donc $(ee_1)e = e_1 e = e \neq 0$ et $e(ee_1) = ee_1 \neq 0$; d'après II, 3), $ee_1 = e_1$. On démontre de même $f_1 f = f_1$. En posant $a' = f_1 y e_1$ on obtient : $aa' = a f_1 y e_1 = aye_1 = ee_1 = e_1$ et $a'a = f_1 y e_1 a = f_1 ya = f_1 f = f_1$. [7]

Dans chacun des systèmes I et II, les propriétés 1), 2) et 3) sont indépendantes : 1) Tout demi-groupe avec un élément unité et un zéro complètement premier (comme par exemple le demi-groupe multiplicatif des entiers naturels) vérifie I, 1) et 2) mais non 3) en général).

2) Un demi-groupe sans zéro, vérifiant I, 3) et tel que $E \neq \emptyset$, est un demi-groupe ayant un noyau complètement simple K où $E \subseteq K$ et réciproquement; en effet, soit $e \in E$; eD est un idéal minimal à droite: si $a \in R \subseteq eD$ (R est un idéal à droite), $ae = e(ae) = (ae)e$ et il existe x tel que $aex = xae = e$ donc $e \in R$ et $eD = R$; de même D a un idéal minimal à gauche De; D a donc un noyau K complètement simple et $E \subseteq K$; la réciproque est évidente. Donc I, 1) et 3) n'entraîne pas I, 2).

3) Les demi-groupes vérifiant I, 2), 3) qui est équivalent à II, 2), 3) sont les sommes orthogonales de demi-groupes complètement 0-simples [6'].

4) Le demi-groupe à 3 éléments 0, e, f défini par $xy = e$ pour $x \neq 0$ $y \neq 0$ et $xy = 0$ sinon, vérifie II, 1), 2) mais non II, 3). De même, l'exemple de 1) prouve que II, 1) et 3) n'entraînent pas II, 2).

Dans la suite nous utiliserons essentiellement le système d'axiomes II. A propos du système I, indiquons seulement qu'il permet d'effectuer une étude élémentaire des demi-groupes complètement 0-simples sans faire intervenir explicitement des conditions minimales ou les équivalences de GREEN ; dans certaines démonstrations il évite le recours au demi-groupe de matrices de REES. Comme conséquences immédiates du système II, citons les corollaires suivants :

COROLLAIRE 4.2. – *Un demi-groupe périodique est complètement simple si et seulement si il est faiblement simplifiable* ($ax = bx$ *et* $ya = yb \Rightarrow a = b$).

---

(27) Au cours de cette partie de la démonstration, nous avons mis en évidence le fait que II, 3) pouvait être remplacé par II, 3'): $ax = bx \neq 0$ et $xa = xb \neq 0 \Rightarrow a = b$.

De même un demi-groupe périodique est complètement 0-simple si et seulement si il est faiblement 0-simplifiable et *si tous ses éléments nilpotents sont de carré nul.*

La propriété de simplifiabilité faible est facile à vérifier sur la table d'un demi-groupe fini ; par exemple un demi-groupe fini est complètement simple si et seulement si deux éléments d'une même rangée de la table étant égaux leurs symétriques par rapport à la diagonale ($\setminus$) sont distincts.

COROLLAIRE 4.3. – *Un demi-groupe faiblement simplifiable avec un seul idempotent net à droite (ou à gauche) est un groupe.*

En ce qui concerne les demi-groupes topologiques on a les conséquences suivantes :

COROLLAIRE 4.4. – *Un demi-groupe compact est simple (ou complètement simple) si et seulement si il est faiblement simplifiable.*

COROLLAIRE 4.5. – *Un demi-groupe compact faiblement simplifiable avec un seul idempotent est un groupe compact.*

D'autres conséquences moins immédiates de la simplifiabilité faible concernent les anneaux :

THÉORÈME 4.6. – *Un anneau régulier dont tous les idempotents sont primitifs est un corps ; en particulier un anneau dont le demi-groupe multiplicatif est complètement 0-simple est un corps* ([28]).

DÉMONSTRATION. – *a*) Cas où le demi-groupe multiplicatif est complètement 0-simple. L'anneau A est sans éléments de carré nul, autres que 0: en effet, s'il existait $a \neq 0$ tel que $a^2 = 0$, en prenant x tel que $axa = a \neq 0$ on aurait $a(a + x) = ax \neq 0$ et $(a + x)a = xa \neq 0$, d'où d'après II, 3), $a + x = x$ et $a = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Il en résulte que (0) est complètement premier ; en effet, si $ab = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, il existe x tel que $bxa \neq 0$ (II, 1)) et $bxabxa \neq 0$ contredit $ab = 0$. Le demi-groupe complètement simple $A \setminus (0)$ est donc simplifiable : c'est un groupe et A est un corps.

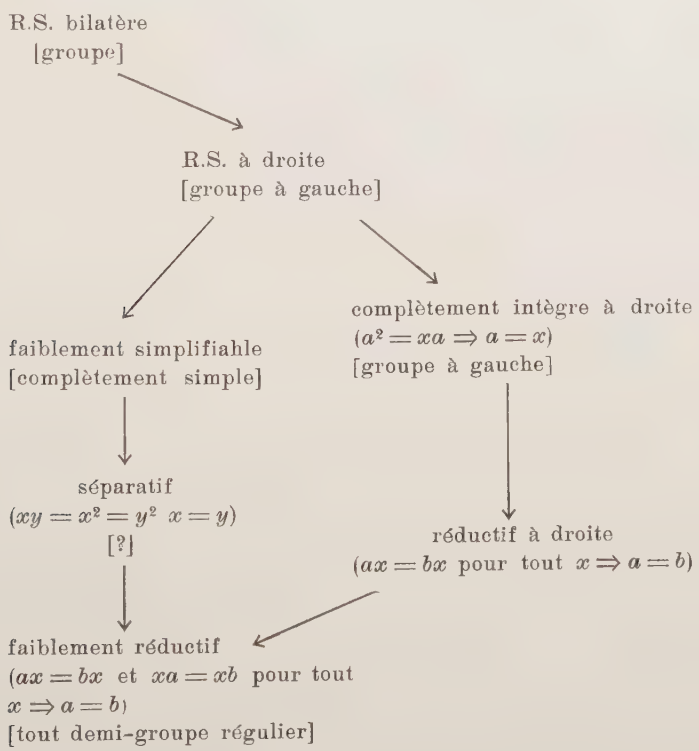
b) Cas d'un anneau régulier dont tous les idempotents sont primitifs : le demi-groupe multiplicatif d'un tel anneau A est somme orthogonale de demi-groupes complètement 0-simples et est faiblement 0-simplifiable (cf. théorème 2.9, *c*) et *d*)) ; chaque composant K de la somme orthogonale est de la forme $C \cup \{0\}$ où C est une classe de l'équivalence $\sim$ définie sur $A \setminus 0$ par : $a \sim b \Leftrightarrow \exists\, x \in A : axb \neq 0$. Montrons que K est un sous-anneau de A ; il suffit d'établir que : $a \in C,\ b \in C \Rightarrow a - b \in K$. Supposons que $a,\ b \in C$ avec

([28]) Dans ce cas particulier le problème a été posé par N. CHAPTAL, Compte-rendus Ac. Sc. t. 260, 1965, p. 27-29.

$a \neq b$; il existe x tel que $axb \neq 0$; si $bxb = 0$, $(a - b)xb = axb \neq 0$ donc $a - b \in C$; si $axa = 0$, $-ax(a - b) = axb \neq 0$, donc $a - b \in C$; si $bxb \neq 0$ et $axa \neq 0$ alors, ou bien $ax(a - b) \neq 0$, ou bien $(a - b)xb \neq 0$ sinon $ax(a - b) = 0$ et $(a - b)xb = 0$ impliqueraient $axa = axb \neq 0$ et $axb = bxb \neq 0$ d'où $a = b$ (A est faiblement 0-simplifiable) ce qui contredit l'hypothèse $a \neq b$. D'après a), chaque composant K de la somme orthogonale est un corps. S'il y avait deux composants distincts K_i, K_j en prenant $a \in K_i \setminus (0)$ et $b \in K_j \setminus (0)$ on aurait $(a + b)a = a^2 \neq 0$ et $a(a + b) = a^2 \neq 0$ d'où $a + b = a$ et $b = 0$ qui est une contradiction; A est donc un corps.

Une conséquence du théorème 4.1 (II) est liée à un problème abordé par S. SCHWARZ [32]: une condition nécessaire pour qu'un demi-groupe S soit plongeable dans un demi-groupe complètement 0-simple est que S soit faiblement (0)-simplifiable.

Le schéma ci-contre indique la position de la simplifiabilité faible par rapport à d'autres formes affaiblies usuelles de la régle de simplification (R.S.).



Les flèches indiquent des implications et sous chaque forme de simplification on indique entre crochet les demi-groupes réguliers la vérifiant. Exemple: un demi-groupe régulier est complètement intègre à droite si et seulement si c'est un groupe à gauche (c'est-à-dire simple à gauche et simplifiable à droite,

cf. [2], p. 37): en effet si D est régulier et complètement intègre à droite, les idempotents ne commutent pas: si $ef = fe = g$ pour $e, f, g \in E$ on a: $g^2 = eg = fg$ d'où $e = f = g$. D est donc complètement simple. Par ailleurs, pour $e, f \in E$, il existe $i \in E$ tel que $ei = i = if$ (prendre $i = exf$ où x est un inverse de fe); $ei = i'$ implique $i = e$ d'où $e = ef$. D est donc un groupe à gauche. La réciproque est immédiate. En ce qui concerne les demi-groupes séparatifs proposons la conjecture: D régulier est séparatif si et seulement si D est réunion de groupes (c'est vrai pour les demi-groupes périodiques cf. [33] et [2] ex. 7 p. 136).

2. - Homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement 0-simple.

Pour étudier de tels homomorphismes nous donnerons diverses caractérisations des familles de complexes qui les déterminent selon les modalités indiquées dans la proposition 3.18, l'idée étant d'exprimer ces homomorphismes comme intersection d'équivalences principales.

DÉFINITIONS 4.7. - Soit $\mathcal{K}$ une famille de complexes K_i $(i \in I)$. On dit que:

a) $\mathcal{K}$ est une famille *régulière* si $P(\mathcal{K})$ est régulière.

EXEMPLE. - $\mathcal{K}$ est formée d'une famille de complexes symétriques ([5], p. 234).

b) $\mathcal{K}$ est une famille *forte* si $(K_i \cdot a) \cap (K_i \cdot b) \neq \emptyset$ et $(K_j^{-1} \cdot a) \cap (K_j^{-1} \cdot b) \neq \emptyset$ pour un couple d'indices i, j au moins, impliquent $(a, b) \in P(\mathcal{K})$.

c) Le *résidu à droite* $W_{\mathcal{K}}$ de la famille $\mathcal{K}$ est défini par:

$$W_{\mathcal{K}} = \{a;\ a \in D:\ K_i \cdot a = \emptyset \text{ pour tout } i \in I\}.$$

En posant $H = \bigcup_{i \in I} K_i$ on a: $W_{\mathcal{K}} = \bigcap_{i \in I} W_{K_i} = W_H$. Si $W_{\mathcal{K}} = \emptyset$, c'est-à-dire H est net à droite dans D, on dit que $\mathcal{K}$ est une famille nette à droite. On définit de même le résidu à gauche ${}_{\mathcal{K}}W$ et une famille nette à gauche. Si $W_{\mathcal{K}} = {}_{\mathcal{K}}W$, la famille est dite *équirésiduelle*; si ${}_{\mathcal{K}}W = W_{\mathcal{K}} = \emptyset$, elle est dite *nette*.

d) Une équivalence ρ sur un demi-groupe D est *faiblement W-simplifiable*, si W est une ρ-classe et si $(ax, bx) \in \rho \setminus (W \times W)$ et $(ya, yb) \in \rho \setminus (W \times W)$ impliquent $(a, b) \in \rho$. Lorsque $W = \emptyset$, on dit que ρ est faiblement simplifiable.

Les deux propositions suivantes caractérisent les équivalences faiblement W-simplifiables. Elles généralisent les théorèmes de THIERRIN ([34], Chap III) qui caractérisent les équivalences simplifiables.

PROPOSITION 4.8. – *Si $\mathcal{K}$ est une famille forte, équirésiduelle de résidu W, de complexes K_i ($i \in I$), alors $P(\mathcal{K})$ est une équivalence faiblement W-simplifiable et toutes les classes distinctes de W sont les complexes $(K_i \cdot a) \cap (K_j \cdot b)$.*

DÉMONSTRATION. – Si (ax, bx) et $(ya, yb) \in P(\mathcal{K}) \setminus W \times W$, il existe z_i et $z_j \in D$ tels que : $(axz_i, bxz_i) \in K_i \times K_i$ et $(z_jya, z_jyb) \in K_j \times K_j$ pour des indices $i, j \in I$. Il en résulte (déf. 4.7, b)) $(a, b) \in P(\mathcal{K})$, ce qui démontre la première partie de la proposition. Supposons que x et $y \in (K_i \cdot a) \cap (K_j \cdot b)$; $(ax, ay) \in$ $\in K_i \times K_i$ et $(xb, yb) \in K_j \times K_j$ impliquent $(x, y) \in P(\mathcal{K})$ (définition 4.7, b)) ; $(K_i \cdot a) \cap (K_j \cdot b)$ est donc indivisible pour $P(\mathcal{K})$. Si $x \in (K_i \cdot a) \cap (K_j \cdot b)$ et si $(x, y) \in P(\mathcal{K})$, $ax \in K_i$ et $xb \in K_j$ impliquent $ay \in K_i$ et $yb \in K_j$ ou

$$y \in (K_i \cdot a) \cap (K_j \cdot b) ;$$

$(K_i \cdot a) \cap (K_j \cdot b)$ est donc aussi saturé pour $P(\mathcal{K})$.

PROPOSITION 4.9. – *Si ρ est une congruence faiblement W-simplifiable sur D, toute famille de ρ-classes ne contenant pas W est forte. S'il existe une telle famille $\mathcal{K}$ qui soit équirésiduelle de résidu W, $\rho = P(\mathcal{K})$.*

DÉMONSTRATION. – Soit $\mathcal{K}$ une famille quelconque de ρ-classes telle que $W \notin \mathcal{K}$. Si $(ax, bx) \in K_i \times K_i \subseteq \rho \setminus W \times W$ et $(ya, yb) \in K_i \times K_i \subseteq \rho \setminus W \times W$, on a : $(a, b) \in \rho \subseteq P(\mathcal{K})$ (la dernière inclusion est vraie car ρ est une congruence). Si $\mathcal{K}$ est une famille équirésiduelle de résidu W et si $(a, b) \in P(\mathcal{K})$, ou bien $(a, b) \in W \times W$ et $(a, b) \in \rho$, ou bien $(a, b) \in (D - W) \times (D - W)$ et il existe des indices i et $j \in I$, des éléments x_i, $x_j \in D$ tels que $(ax_i, bx_i) \in K_i \times K_i$ et $(x_ja, x_jb) \in K_j \times K_j$. Il en résulte (ax_i, bx_i) et $(x_ja, x_jb) \in \rho \setminus W \times W$, d'où $(a, b) \in \rho$. En définitive $\rho = P(\mathcal{K})$.

Pour les équivalences faiblement simplifiables on obtient le corollaire suivant (dans la suite nous n'indiquons pas systématiquement les résultats qu'on obtient en remplaçant W par $\emptyset$).

COROLLAIRE 4.10. – *Si $\mathcal{K}$ est une famille forte, nette de complexes K_i, $P(\mathcal{K})$ est une équivalence faiblement simplifiable et ses classes sont les complexes $(K_i \cdot a) \cap (K_j \cdot b)$. Si ρ est une congruence faiblement simplifiable, toute famille de ρ-classes est forte. Pour toute famille $\mathcal{K}$ qui est nette $\rho = P(\mathcal{K})$.*

Dans la seconde partie de ce corollaire il y a toujours une famille nette: celle de toutes les classes. Dans la proposition 4.9, il n'existe pas toujours de famille équirésiduelle de résidu W: s'il existe une famille ne contenant pas W, équirésiduelle, de résidu W, W est le résidu d'un complexe H (équirésiduel) tel que $H \cap W = \emptyset$. Réciproquement, s'il existe un tel complexe H, il est évident que toute famille de complexes ne contenant pas W et recouvrant H, est équirésiduelle de résidu W. Or une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal bilatère W soit tel que $W = W_H = {}_HW$ pour un complexe H disjoint de W est que W soit un *idéal fortement large* ([14], déf. 1.2, Chap. I) c'est-à-dire que $aD \subseteq W \Rightarrow a \in W$ et $Da \subseteq W \Rightarrow a \in W$; en effet, si

W est fortement large, il est résidu de $D \setminus W$ et si $W = W_H = {}_H W$ avec $H \cap W = \emptyset$, alors $a \notin W$ implique qu'il existe $x, y \in D$ tels que ax et $ya \in H$; $ax \notin W$ et $ya \notin W$, donc $aD \subsetneqq W$ et $Da \subsetneqq W$. Il résulte de ces considérations que :

COROLLAIRE 4.11. – *Soit W un idéal fortement large d'un demi-groupe D. Les congruences faiblement W-simplifiables sur D coïncident avec les congruences $P(\mathfrak{K})$ définies par des familles $\mathfrak{K}$ de complexes, régulières, fortes, équirésiduelles de résidu W.*

En général, une famille $\mathfrak{K}$ de complexes, même si elle vérifie toutes les propriétés du corollaire 4.11, n'est pas une famille de classes de $P(\mathfrak{K})$; cela se produit pour certaines familles de sous-demi-groupes :

DÉFINITION 4.12. – *Un complexe K d'un demi-groupe D est dit faiblement unitaire si :*

$$\{x\,;\ x \in D :\ xK \cap K \neq \emptyset \quad et \quad Kx \cap K \neq \emptyset\} \subseteq K.$$

PROPOSITION 4.13. – *Si $\mathfrak{S}$ est une famille forte de sous-demi-groupes S_i $(i \in I)$ faiblement unitaires d'un demi-groupe D, chaque S_i est une classe de $P(\mathfrak{S})$.*

DÉMONSTRATION. – Si s et $t \in S_i$, st, ts et $s^2 \in S_i$; il en résulte

$$s \in (S_i \cdot {}^{-1} s) \cap (S_i \cdot {}^{-1} t) \text{ et } s \in ({}^{-1} S_i \cdot s) \cap ({}^{-1} S_i \cdot t).$$

La famille $\mathfrak{S}$ étant forte $(s, t) \in P(\mathfrak{S})$ donc S_i est contenu dans une classe de $P(\mathfrak{S})$. Si $s \in S_i$, pour x tel que $(s, x) \in P(\mathfrak{S})$, $s^2 \in S_i$ implique sx et $xs \in S_i$; S_i étant faiblement unitaire, $x \in S_i$, ce qui achève de prouver que S_i est une classe de $P(\mathfrak{S})$.

Compte tenu des propositions précédentes et du système d'axiomes II (Théorème 4.1), on obtient :

THÉORÈME 4.14. – *Si $\mathfrak{S}$ est une famille de sous-demi-groupes faiblement unitaires, régulière, forte, équirésiduelle de résidu premier, $D/P(\mathfrak{S})$ est un demi-groupe complètement 0-simple. Réciproquement, si ρ est une congruence sur un demi-groupe D telle que D/ρ soit complètement 0-simple, alors ρ coïncide avec l'équivalence $P(\mathfrak{S})$ définie par la famille $\mathfrak{S}$ de sous-demi-groupes images réciproques des idempotents non nuls de D/ρ. $\mathfrak{S}$ est une famille de sous-demi-groupes faiblement unitaires régulière, forte, équirésiduelle de résidu premier. (Condition (L))* [29].

Ce théorème indique qu'il y a bijection entre les images homomorphes complètement 0-simples d'un demi-groupe D, et les familles de D, *régulières* (L_1),

[29] La famille $\mathfrak{S}$ joue un rôle privilégié par rapport à d'autres familles de complexes ayant des propriétés analogues (la condition faiblement unitaire étant remplacée par une condition de type « parfait » [5] Ces autres familles sont définies par $K_i = (S_i \cdot {}^{-1} a) \cap ({}^{-1} S_i \cdot a)$. (cf. remarque suivant le corollaire 3.21).

fortes (L_2), *équirésiduelles de résidu premier* (L_3), *de sous-demi-groupes faiblement unitaires* (L_4).

En utilisant les congruences ρ sur D telles que D/ρ soit une 0-bande rectangulaire on peut remplacer les propriétés (L_i) par des propriétés portant sur la réunion des sous-demi-groupes composants une famille $\mathcal{S}$. Nous rappelons ici sans démonstration les principaux résultats [6'] qui seront utilisés dans la suite :

Une 0-bande rectangulaire B est un demi-groupe complètement 0-simple dont le groupe de base est trivial ; elle est définie par :

1) *pour tout* $a, b \in B$, $aba = a$ *où* 0 ; 2) (0) *est un idéal premier.*

Une congruence ρ sur un demi-groupe D, telle que D/ρ soit une 0-bande rectangulaire et telle que la classe zéro soit un idéal bilatère W de D est dite congruence W-matricielle. La décomposition de D correspondante est dite décomposition W-matricielle.

THÉOREME 4.25. – *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe D admette une décomposition W-matricielle est que D contienne un idéal W premier vérifiant la condition* (C) : $abc \in W \Rightarrow ab \in W$ *ou* $bc \in W$.

Que la condition soit nécessaire est évident (cela traduit une propriété de l'idéal (0) dans un demi-groupe complètement 0-simple). Pour démontrer qu'elle est suffisante on utilise la congruence

$$\rho = \{(a, b) \in D \times D : axa \in W \Leftrightarrow bxb \in W \text{ pour tout } x \in D\}.$$

Un idéal premier vérifiant (C) est dit *matriciel*. Pour un tel idéal W :

DÉFINITION 4.16. – *Une équivalence ρ est dite W-zéro à gauche si et seulement si* 1) *ρ est régulière à gauche* ; 2) *W est une ρ-classe* ; 3) *pour tout* $x, y \in D$, $xy \notin W \Rightarrow (xy, x) \in \rho$.

On définit symétriquement une équivalence W-zéro à droite [30]. L'intersection d'une équivalence W-zéro à droite et d'une équivalence W-zéro à gauche est une congruence W-matricielle ; réciproquement, toute congruence W-matricielle s'exprime avec unicité comme intersection de deux équivalences du type précédent. Pour un idéal W donné, l'intersection et le sup. de deux équivalences W-zéro à gauche sont du même type. L'équivalence principale à gauche ${}_WP$ est la moins fine de ces équivalences, la plus fine ${}_W\Sigma$ étant définie par :

$(a, b) \in {}_W\Sigma \Leftrightarrow (a, b) \in W \times W$ ou bien il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D$ tels que

$$aD - W \,|\, a_1D - W \,|\, \ldots \,|\, a_nD - W \,|\, bD - W. \ [31]$$

[30] Signalons au passage que les équivalences W-zéro à gauche vérifient $b)$ de la proposition 2.3.

[31] $U|V$ signifie $U \cap V \neq \emptyset$. Dans le cas $W = \emptyset$, ${}_W\Sigma$ est l'équivalence réversible généralisée de P. DUBREIL [6].

Il en résulte que $\Sigma_W \cap {}_W\Sigma$ est la plus fine congruence W-matricielle sur D.

Dans un demi-groupe S complètement 0-simple, (0) est un idéal matriciel; de plus pour $a, b \in D \setminus (0)$: $aS = bS \Leftrightarrow$ il existe $x, y \in D$ tels que $ax = by \neq 0$; l'équivalence ${}_{(0)}\Sigma$ définie précédemment coïncide donc avec l'équivalence $\mathcal{R}$ de GREEN et $\Sigma_{(0)} \cap {}_{(0)}\Sigma$ coïncide avec $\mathcal{H}$. Donc, si un demi-groupe D quelconque a une image homomorphe complètement 0-simple il admet une décomposition W-matricielle et d'après le théorème 4.15 :

COROLLAIRE 4.17. – *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe D ait pour image homomorphe un demi-groupe complètement 0-simple est que D contienne un idéal matriciel propre.*

REMARQUE. – Un demi-groupe a toujours une image homomorphe complètement simple.

On peut alors décrire la structure de D de la façon suivante : il existe des ensembles d'indices I et Λ, I repérant les classes de ${}_W\Sigma$, Λ celles de Σ_W. $D = W + \sum_{\substack{i \in I \\ \lambda \in \Lambda}} C_{i\lambda}$, où les $C_{i\lambda}$ ou bien sont des sous-demi-groupes, ou bien vérifient $C_{i\lambda}^2 \subseteq W$; de plus: $C_{i\lambda} \cdot C_{j\mu} \subseteq C_{i\mu}$ si $C_{j\mu}^2$ est un sous-demi-groupe et $C_{i\lambda} \cdot C_{j\lambda} \subseteq W$ si $C_{j\lambda}^2 \subseteq W$ (ces propriétés sont les mêmes que celles des $\mathcal{H}$-classes de GREEN sur un demi-groupe complètement 0-simple).

Les théorèmes suivant caractérisent les familles $\mathfrak{S}$ de sous-demi-groupes vérifiant les conditions (L) du théorème 4.14 par des propriétés portant sur le complexe K réunion des $S_i \in \mathfrak{S}$ et sur une décomposition W-matricielle liée à K:

THÉORÈME 4.18. – *Une famille $\mathfrak{S}$ de sous-demi-groupes d'un demi-groupe D vérifie les conditions (L), si et seulement si leur réunion K vérifie :*

1) *K est réflectif ($ab \in K \Rightarrow ba \in K$) et son résidu est un idéal matriciel W de D;*

2) *Il existe une équivalence ρ, W-zéro à gauche, telle que pour toute classe $R \neq W$ de ρ, $K \cap R$ soit un sous-demi-groupe unitaire à droite;*

3) *Il existe une équivalence λ, W-zéro à droite, telle que pour toute classe $L \neq W$ de λ, $K \cap L$ soit un sous-demi-groupe unitaire à gauche.*

On peut remplacer 2) et 3) par: il existe une congruence W-matricielle μ dont les classes $M \neq W$ sont telles que $M \cap K$ soit un sous-demi-groupe faiblement unitaire.

DÉMONSTRATION. – Une famille $\mathfrak{S}$ de sous-demi-groupes vérifiant (L) définit un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe complètement 0-simple $\bar{D}$. K est saturé et a pour image $\bar{E} \setminus \bar{0}$ qui est un complexe réflectif de $\bar{D}$; il en est donc de même de K dans D. La décomposition de $\bar{D}$ en classes des

équivalences $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ de GREEN se remonte en D: on pose $\rho = \varphi^{-1}(\bar{\mathcal{R}})$ et $\lambda = \varphi^{-1}(\mathcal{L})$. Si $R \neq W$ est une classe de ρ:

$$x \in R \cap K,\ y \in R \cap K \Rightarrow (\bar{x},\ \bar{y}) \in \bar{\mathcal{R}} \cap (\bar{E} \times \bar{E}) \Rightarrow \bar{xy} = \bar{y} \Rightarrow xy \in R \cap K;$$

$$xy \in R \cap K,\ y \in R \cap K \Rightarrow (\bar{xy},\ \bar{y}) \in \mathcal{R} \cap (\bar{E} \times E) \Rightarrow \bar{x} \in \bar{E} \setminus 0 \Rightarrow x \in R \cap K.$$

On démontre de même la propriété 3).

Réciproquement, soit K un complexe vérifiant 1), 2), 3). On note $C_{i\lambda}$ $(i \in I,\ \lambda \in \Lambda)$ les classes ([32]) de la décomposition W-matricielle $\mu = \rho \cap \lambda$; $C_{i\lambda} \cap K = S_{i\lambda}$ où bien $C_{i\lambda} \cap K \neq \emptyset$. On pose $\mathcal{S} = \{S_{i\lambda}\}$. D'après 2) et 3), les μ-classes qui rencontrent K, le coupent suivant des sous-demi-groupes faiblement unitaires (L_4). La propriété (L_3) est évidente. Pour démontrer (L_1) supposons $(a,\ b) \in P(\mathcal{S})$. Si $cax \in S_{i\lambda} = C_{i\lambda} \cap K$, alors $c \in C_{i\mu}$, $a \in C_{k\lambda}$, $x \in C_{j\lambda}$. Il en résulte $axc \in K$ (d'après 1)) et $axc \in S_{k\mu}$. Donc $bxc \in S_{k\mu}$ et $cbx \in S_{i\lambda}$. Donc $S_{i\lambda} \cdot ca \subseteq S_{i\lambda} \cdot cb$. L'inclusion contraire se démontre de la même façon ainsi que $S_{i\lambda^*} \cdot ac = S_{i\lambda^*} \cdot bc$ d'où la régularité de $\mathcal{S}$. Pour démontrer (L_2), supposons qu'il existe $x,\ y \in D,\ i,\ j \in I,\ \lambda,\ \mu \in \Lambda$ tels que ax et $bx \in S_{i\lambda}$, ya et $yb \in S_{j\mu}$. Pour tout z tel que $az \in S_{k\nu}$, on a $k = i$ d'où bx et $az \in K \cap R_i$, et $bxaz \in K$. Donc $xazb \in K \cap L_\mu$ et $xa \in K \cap L_\mu$. Comme $K \cap L_\mu$ est unitaire à gauche, $zb \in K \cap L_\mu$ et $bz \in K \cap C_{i\nu} = S_{i\nu} = S_{k\nu}$. Ceci prouve $S_{k\nu} \cdot a \subseteq S_{k\nu} \cdot b$. En terminant comme précédemment, on a $(a,\ b) \in P(\mathcal{S})$ et $\mathcal{S}$ est une famille forte.

Ce théorème montre qu'un homomorphisme d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement 0-simple est déterminé par le couple formé par un complexe K vérifiant 1) et une matrice (ou la congruence W-matricielle) caractérisant la 0-bande rectangulaire $D/\rho \cap \lambda$. Cette matrice est une matrice contractée de celle associée à $D/\Sigma_W \cap {}_W\Sigma$ selon la terminologie de [6']; de plus, elle (ou la congruence W-matricielle) est *liée* à K par les propriétés 2) et 3).

Le théorème suivant caractérise K de façon indépendante de ρ et λ:

THÉORÈME 4.19. – *Pour un complexe K, réflectif de résidu un idéal matriciel W, il y a équivalence entre les conditions* 2) *et* 3) *du théorème* 4.18 *et les conditions* 2'), 3') *suivantes*:

2') *Toute classe de ${}_W\Sigma$, autre que W, coupe K suivant un sous-demi-groupe unitaire à droite.*

3') *Toute classe de Σ_W, autre que W, coupe K suivant un sous-demi-groupe unitaire à gauche.*

DÉMONSTRATION. – Il est évident que 2') implique 2). Soit ρ' une équivalence W-zéro à gauche et $\rho' \subseteq \rho$, où ρ vérifie la propriété 2) relativement

([32]) Il s'agit des classes distinctes de W; on a $C_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$ où R_i est une ρ-classe L_λ une λ-classe.

à K. Si $R' \neq W$ est une classe de ρ', $R' \cap K \neq \emptyset$; en effet, pour tout $x \in R'$, il existe y tel que $xy \in K$; comme ρ' est W-zéro à gauche, $x \in R'$ implique $xy \in R' \cup W$, et comme $xy \in K$ on a bien $xy \in K \cap R'$. D'autre part, si x et $y \in R' \cap K$, alors x et $y \in R \cap K$ (avec $R' \subseteq R$) pour une certaine ρ-classe $R \neq W$. De $xy \in R$, on déduit $xy \in R'$. $R' \cap K$ est donc un sous-demi-groupe. Enfin, si $xy \in R' \cap K$ et $y \in R' \cap K$, comme précédemment $x \in R \cap K$ donc $x \in R' \cap K$ qui est unitaire à droite. Les propriétés mises en évidence pour ρ' sont valables en particulier pour ${}_W\Sigma$, d'où le théorème.

La démonstration utilise la propriété suivante de R (ou R') : R est consistant à gauche ($xy \in R \Rightarrow x \in R$), et $R \cup W$ est un idéal à droite. Les classes de ${}_W\Sigma$ autres que W sont les complexes *minimaux* pour ces deux propriétés.

D'après ce théorème 4.19, K apparaît comme la réunion d'une famille $\mathfrak{S}$ de sous-demi-groupes (traces de K sur les classes de $\Sigma_W \cap {}_W\Sigma$) telle que $D/P(\mathfrak{S})$ soit l'image homomorphe maximale complètement 0-simple définie à l'aide de K. Pour obtenir les autres images homomorphes de D définies par K, nous sommes ramenés à la détermination des congruences sur $D/P(\mathfrak{S})$. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Le tableau ci-dessous indique brièvement comment s'adaptent les résultats généraux lorsque $D = \varphi(D)$ est un demi-groupe complètement 0-simple d'un type particulier.

$\overline{D}$	complètement simple	$D \simeq B \times G$ groupe rectangulaire	groupe à droite	groupe avec 0	Demi-groupe de Brandt
K	réflectif, net. K est lié à μ 1), 2) du th. 4.18	sous demi-groupe reflectif, net, unitaire	sous-demi groupe réflectif, net, unitaire	sous-demi groupe pseudo-normal [5]	réflectif, semi-stable ($x \in K \Rightarrow x^n \in K$), fort, unitaire, de résidu premier
μ	congruence matricielle liée à K	toute congruence matricielle	toute congruence zéro à droite	une seule congruence W-matricielle (la moins fine p. exemple)	une seule congruence W-matricielle.
ρ	$P(\mathcal{H})$	$P(\mathcal{H})$ [33]	$\mathcal{H}P$	$P_K = {}_KP$	$P_K = {}_KP$

[33] D est isomorphe au produit cartésien $B \times G$ d'une bande rectangulaire par un groupe. Sous la forme $B \times G$, il est évident que toute congruence est définie par le couple: congruence (matricielle) sur B, congruence sur G.

Dans les lignes du tableau relatives à K et μ sont indiquées des conditions nécessaires et suffisantes pour que le couple (K, μ) définisse un homomorphisme de D sur $\bar{D}$ dont la nature est indiquée en tête de colonne. Dans les deux dernières colonnes, les décompositions matricielles n'interviennent pas dans la description des homomorphismes. Le cas des demi-groupes de BRANDT étudié par ailleurs dans [24], [19], se distingue par le fait que la congruence d'homomorphisme coïncide avec l'équivalence principale définie par un complexe *divisible* modulo P_K.

3. – Le treillis des congruences sur un demi-groupe complètement 0-simple.

Toute congruence distincte de l'équivalence universelle sur un demi-groupe D complètement 0-simple s'exprime comme intersection d'équivalences principales définies par une famille de sous-demi-groupes dont la réunion K est liée à une décomposition (0)-matricielle de D (cf. théorème 4.18). Dans la suite nous supposons que D est donné sous la forme d'un demi-groupe régulier de matrices de REES $\mathfrak{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ dont on note les $\mathcal{H}$-classes autres que (0) par $H_{i\lambda}$.

Pour tout complexe K de D, on définit des complexes $K_{i\lambda}$ du groupe avec zéro G^0 de la façon suivante; $K_{i\lambda} = \{x;\ x \in G^0 : (x;\ i,\ \lambda) \in K \cap H_{i\lambda}\}$.

DÉFINITION 4.20. – *Un complexe K de $D = \mathfrak{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ est dit normal s'il vérifie les propriétés* 1), 2), 3) *du théorème* 4.18) (*ou* 1), 2'), 3') *du théorème* 4.19). *Une congruence* (0)*-matricielle $\rho \cap \lambda$ sur D vérifiant* 2) *et* 3) *du théorème* 4.18 *est dite liée à K.*

EXEMPLE. – $E \setminus 0$ et le complexe réunion des $\mathcal{H}$-classes groupes (autres que (0)) sont des complexes normaux. Le théorème suivant indique comment on les obtient tous:

THÉORÈME 4.21. – *Un complexe K d'un demi-groupe complètement 0-simple $\mathfrak{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ est normal, si et seulement si:*

a) K ne contient pas 0 et $K \cap H_{i\lambda} = \emptyset$ si et seulement si $p_{i\lambda} = 0$,

b) pour tout $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, $p_{\lambda i} \neq 0$ implique $p_{\lambda i} K_{i\lambda} = N$ où N est un sous-groupe normal de G.

DÉMONSTRATION. – 1) Supposons K normal et soient $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ tels que $p_{\lambda i} = 0$. Si $(a;\ i,\ \lambda) \in K$, avec $p_{\mu i} \neq 0$, $(p_{\mu i}^{-1};\ i,\ \mu)\ (a;\ i,\ \lambda) = (a;\ i,\ \lambda) \in K \Rightarrow$ $\Rightarrow (a;\ i,\ \lambda)\ (p_{\mu i}^{-1};\ i,\ \lambda) = 0 \in K$ (K est réflectif); ceci est impossible (théorème 4.18,1)); donc $K \cap H_{i\lambda} \neq \emptyset$. Inversement, soient i, λ tels que $p_{\lambda i} \neq 0$; comme $K \cap L_\lambda \neq \emptyset$, il existe $(x;\ y,\ \lambda) \in K$ et d'après ce qui précède $p_{\lambda j} \neq 0$; $(x;\ j,\ \lambda)\ (p_{\lambda i}^{-1};\ i,\ \lambda) \in K$ donc $(p_{\lambda i}^{-1};\ i,\ \lambda)\ (x;\ j,\ \lambda) = (p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} x;\ i,\ \lambda) \in K$ et $K \cap H_{i\lambda} \neq \emptyset$, ce qui achève de démontrer *a)*.

Si $p_{\lambda i} \neq 0$ et $p_{\mu j} \neq 0$, alors $p_{\lambda i} K_{i\lambda} = p_{\mu j} K_{j\mu}$. En effet:

$$x \in p_{\lambda i} K_{i\lambda} \Leftrightarrow (p_{\lambda i}^{-1} x\,;\ i,\ \lambda) \in K\,;\ \text{or:}$$

$$(p_{\lambda i}^{-1} x\,;\ i,\ \lambda) = (p_{\lambda i}^{-1}\,;\ i,\ \mu)\,(p_{\mu j}^{-1} x\,;\ j,\ \lambda) \in K \Leftrightarrow (p_{\mu j}^{-1} x\,;\ j,\ \lambda)\,(p_{\lambda i}^{-1}\,;\ i,\ \lambda) =$$
$$= (p_{\mu j}^{-1} x\,;\ j,\ \mu) \in K \Leftrightarrow x \in p_{\mu j} K_{j\mu}.$$

Posons $p_{\lambda i} K_{i\lambda} = N$ (pour tout i, λ tels que $p_{\lambda i} \neq 0$, N est indépendant du choix de i et λ). Si $x \in N$, $y \in N$, alors $(p_{\lambda i}^{-1} x\,;\ i,\ \lambda)$ et $(p_{\lambda i}^{-1} y\,;\ i,\ \lambda) \in K$. Comme $K \cap H_{i\lambda}$ est un sous-demi-groupe $(p_{\lambda i}^{-1} xy\,;\ i,\ \lambda) \in K$ et $xy \in N$; en particulier $x^2 \in N$. Mais $(p_{\lambda i}^{-1} x^{-1}\,;\ i,\ \lambda)\,(p_{\lambda i}^{-1} x^2\,;\ i,\ \lambda) \in K$. D'après 3) du théorème 4.18, $(p_{\lambda i}^{-1} x^{-1}\,;\ i,\ \lambda) \in K$ et $x^{-1} \in N$. Cela montre que N est un sous-groupe de G. Si $xy \in N$, $(p_{\lambda i}^{-1} xy\,;\ i,\ \lambda) \in K$; or $(p_{\lambda i}^{-1} xy\,;\ i,\ \lambda) = (p_{\lambda i}^{-1} x\,;\ i,\ \lambda)\,(p_{\lambda i}^{-1} y\,;\ i,\ \lambda) \in K$ implique $(p_{\lambda i}^{-1} y\,;\ i,\ \lambda)\,(p_{\lambda i}^{-1} x\,;\ i,\ \lambda) = (p_{\lambda i}^{-1} yx\,;\ i,\ \lambda) \in K$, d'où $yx \in N$. N est un sous-groupe réflectif donc normal de G.

2) Réciproquement, soit K un complexe de D vérifiant *a*) et *b*). K est réflectif; en effet:

$(a\,;\ i,\ \lambda)\ (b\,;\ j,\ \mu) \in K \Rightarrow p_{\mu i} a p_{\lambda j} b \in N \Rightarrow (bp_{\mu i} a\,;\ i,\ \lambda) = (b\,;\ j,\ \mu)\,(a\,;\ i,\ \lambda) \in K.$

En utilisant *a*) et le fait que D est 0-inversé, on vérifie sans difficulté que K a pour résidu (0). De plus:

$$(x\,;\ i,\ \lambda) \text{ et } (y\,;\ i,\ \mu) \in K \cap R_i \Rightarrow p_{\lambda i} x \in N \text{ et } p_{\mu i} y \in N \Rightarrow p_{\mu i} x p_{\lambda i} y \in N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (xp_{\lambda i} y\,;\ i,\ \mu) \in K \cap R_i.$$

$$(x\,;\ i,\ \lambda)\ (y\,;\ i,\ \mu) \in K \cap R_i \text{ et } (y\,;\ i,\ \mu) \in K \cap R_i \Rightarrow p_{\mu i} x p_{\lambda i} y \in N \text{ et } p_{\mu i} y \in N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_{\lambda i} x \in N \Rightarrow (x\,;\ i,\ \lambda) \in K \cap R_i.$$

Donc $K \cap R_i$ est un sous-demi-groupe unitaire à droite. De même $K \cap L_\lambda$ est un sous-demi-groupe unitaire à gauche.

Pour déterminer les congruences (0)-matricielles liées à un complexe normal K, on introduit la notion suivante:

DÉFINITION 4.22. – *a*) *On appelle extrait de la matrice* P *de* $\mathfrak{M}^0(G\,;\ I, \Lambda\,;\ P)$ *un élément de* G *de la forme* $p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1}$. *Un tel élément sera noté* $\begin{bmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{bmatrix}$.

b) *Une partition* p *de* I [*resp.* π *de* Λ] *est dite liée au sous-groupe normal* N *de* G, *si elle vérifie la propriété suivante*:

$$(i, j) \in p \Rightarrow \forall\, \lambda \in \Lambda,\ p_{\lambda i} = 0 \Leftrightarrow p_{\lambda j} = 0, \text{ et } \forall\, \lambda,\ \mu \in \Lambda: \begin{bmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \in N.$$

$$[\text{resp. } (\lambda,\ \mu) \in \pi \Rightarrow \forall\, i \in I,\ p_{\lambda i} = 0 \Leftrightarrow p_{\mu i} = 0, \text{ et } \forall\, i, j \in I: \begin{bmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \in N].$$

REMARQUE. – On vérifie qu'entre les extraits on a les relations suivantes:

$$\begin{bmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j & k \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & k \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$p_{\mu j}^{-1} \begin{bmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{bmatrix}^{-1} p_{\mu j} \cdot p_{\nu j}^{-1} \begin{bmatrix} i & j \\ \mu & \nu \end{bmatrix}^{-1} p_{\nu j} = p_{\nu j}^{-1} \begin{bmatrix} i & j \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} p_{\nu j}.$$

THÉORÈME 4.23. – *Soit K un complexe normal d'un demi-groupe complètement 0-simple $\mathfrak{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ défini par un sous-groupe normal N de G. Toute congruence (0)-matricielle liée à K définit une partition p de I et π de Λ liées à N et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. – 1) Soit μ une congruence (0)-matricielle liée à K. D/μ est une image homomorphe de $D/\mathcal{H}$. Or la matrice de $D/\mathcal{H}$ s'obtient à partir de celle de D par remplacement de $p_{\lambda i} \neq 0$ par l'élément unité. De [6'] (proposition 1.3), il résulte que μ induit sur I une partition p telle que: $(i, j) \in p \Rightarrow$ (pour tout $\lambda \in \Lambda$, $p_{\lambda i} \neq 0 \Leftrightarrow p_{\lambda j} \neq 0$). Si $(i, j) \in p$, les idempotents $(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$ et $(p_{\lambda j}^{-1}; j, \lambda)$ sont dans même classe de la congruence définie par le couple K, μ. Il en est de même de $(p_{\mu j}^{-1}; j, \mu)(p_{\lambda i}^{-1}; i, \lambda)$ et $(p_{\mu j}^{-1}; j, \mu)(p_{\lambda j}^{-1}; j, \lambda) = (p_{\lambda j}^{-1}; j, \lambda)$ ($p_{\lambda i}, p_{\lambda j}, p_{\mu j}, p_{\mu i}$ sont tous supposés non nuls). Donc $(p_{\mu j}^{-1} p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1}; j, \lambda) \in K$ et $p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \in N$. On démontre de la même façon que la partition π induite sur Λ par μ a des propriétés analogues.

2) Réciproquement, soient p, π des partitions de I, Λ liées à N. Posons $[(a; i, \lambda), (b; j, \mu)] \in \rho \Leftrightarrow (i, j) \in p$, et $(0, 0) \in \rho$. On vérifie que ρ définit une équivalence (0)-zéro à gauche. Soit R une ρ-classe distincte de (0). Si $(x; i, \lambda)$ et $(y; j, \mu) \in K \cap R$, alors $p_{\lambda i} x \in N$, $p_{\mu j} y \in N$ et $p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \in N$. On en déduit $p_{\mu j} y p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \in N$, d'où $y p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} \in N$. De même, $p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} p_{\mu i} x \in N$. Il en résulte $p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} p_{\mu i} x p_{\lambda j} y p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1} \in N$ qui implique $p_{\mu i} x p_{\lambda j} y \in N$ c'est-à-dire $(x p_{\lambda j} y; i, \mu) = (x; i, \lambda)(y; j, \mu) \in K \cap R$. Par un calcul analogue on démontre que $K \cap R$ est unitaire à droite. En définissant symétriquement λ par:

$$[(a; i, \lambda), (b; j, \mu)] \in \lambda \Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in \pi \text{ et } (0, 0) \in \lambda,$$

on obtient une congruence (0)-matricielle $\rho \cap \lambda$ liée à K.

COROLLAIRE 4.24. – *Toute congruence propre* [34] *sur un demi-groupe complètement 0-simple $\mathfrak{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ est définie avec unicité par la donnée d'un triple (N, p, π) où N est un sous-groupe normal de G, p et π des partitions de I et Λ respectivement, liées à N.*

Cela résulte des théorèmes 4.18 et 4.23.

---

[34] Propre signifie distincte de l'équivalence universelle.

PROPOSITION 4.25. – *Soient* ρ_i $(i=1, 2)$ *deux congruences propres sur un demi-groupe complètement* 0*-simple* $D=\mathfrak{M}^0(G; I, \Lambda; P)$, N_i, p_i, π_i *les sous-groupes normaux et les partitions définissant les* ρ_i. *Alors* $\rho_1 \subseteq \rho_2$ *si et seulement si* $N_1 \subseteq N_2$, $p_1 \subseteq p_2$ *et* $\pi_1 \subseteq \pi_2$.

DÉMONSTRATION. – 1) Supposons $\rho_1 \subseteq \rho_2$. Il est évident que $K_1 \subseteq K_2$. Si $x \in N_1$, pour $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ tels que $p_{\lambda i} \neq 0$, $(p_{\lambda i}^{-1} x\,;\, i,\, \lambda) \in K_1 \subseteq K_2$ d'où $x \in N_2$ et $N_1 \subseteq N_2$. La congruence 0-matricielle μ_i associée à ρ_i est définie par: $(a, b) \in \mu_i \Leftrightarrow (a\rho_i, b\rho_i) \in \mathcal{H}$ (où $\mathcal{H}$ est l'équivalence de GREEN sur D/ρ_i, $i=1, 2$); donc $\mu_1 \subseteq \mu_2$, ce qui implique $p_1 \subseteq p_2$ et $\pi_1 \subseteq \pi_2$.

2) Réciproquement, supposons $N_1 \subseteq N_2$, $p_1 \subseteq p_2$, $\pi_1 \subseteq \pi_2$. Pour des partitions p et π de I et Λ, notons $\bar{I}$ et $\bar{\Lambda}$ les ensembles quotients I/p et Λ/π. Pour un complexe K lié à p et π, on a: $K = \bigcup_{\substack{\bar{i} \in \bar{I} \\ \bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}}} S_{\bar{i}\bar{\lambda}}$ où les sous-demi-groupes $S_{\bar{i}\bar{\lambda}}$ sont les traces sur K des classes sous-demi-groupes de la congruence (0)-matricielle définie par (p, π). D'après le théorème 4.14, la congruence ρ correspondant à K, p, π coïncide avec $P(\mathfrak{S})$ où $\mathfrak{S}$ est la famille des sous-demi-groupes $S_{\bar{i}\bar{\lambda}}$. Ce qui précède est valable pour les congruences ρ_1 et ρ_2. Dans la suite nous affectons des indices 1 et 2, ce qui concerne ρ_1 et ρ_2. Montrons que $P(\mathfrak{S}_1) \subseteq P(\mathfrak{S}_2)$. Soient a, b non nuls tels que $(a, b) \in P(\mathfrak{S}_1)$. Si $ax \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$ il existe une classe $H_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1}$ de la congruence (0)-matricielle (p_1, π_1), telle que $ax \in H_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1}$. Cette classe est de carré non nul. Il existe alors $y \in H_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1}$ tel que axy et $yax \in S_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1}$. Mais par hypothèse $H_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1} \subseteq H_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$ ($H_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$ est la classe de la congruence (0)-matricielle (p_2, π_2) contenant $S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$). Compte tenu du fait que $K_1 \subseteq K_2$ (cela résulte de $N_1 \subseteq N_2$) on a donc: $S_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1} \subseteq S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$. Donc $ax \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$, $axy \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$ et $yax \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$. Par suite de la propriété d'unitarité faible de $S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$, $y \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$. Or, $axy \in S_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1}$ et $yax \in S_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1}$ impliquent respectivement (puisque $(a, b) \in P(\mathfrak{S}_1)$) $bxy \in S_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1}$ et $ybx \in S_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1}$ comme $S_{\bar{i}_1\bar{\lambda}_1} \subseteq S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$ et $y \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$, en utilisant à nouveau l'unitarité faible, il vient $bx \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$. On démontrerait de même: $bx \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2} \Rightarrow ax \in S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$ c'est-à-dire $(a, b) \in P_{S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}}$. Symétriquement a et b sont équivalents modulo les équivalences principales à gauche définies par les $S_{\bar{i}_2\bar{\lambda}_2}$, d'où $(a, b) \in P(\mathfrak{S}_2)$.

PROPOSITION 4.26. – *Soient* $\rho_i = (N_i\,;\, p_i, \pi_i)$ *pour* $i=1, 2$, *deux congruences propres sur un demi-groupe complètement* 0*-simple* $\mathfrak{M}^0(G; I, \Lambda; P)$: $\rho_1 \cap \rho_2 = (N_1 \cap N_2\,;\, p_1 \cap p_2, \pi_1 \cap \pi_2)$ *et* $\rho_1 \vee \rho_2 = (N_1 \cdot N_2\,;\, p_1 \vee p_2, \pi_1 \vee \pi_2)$ *où* $p_1 \vee p_2$ *et* $\pi_1 \vee \pi_2$ *désignent le sup. des équivalences* p_i *et* π_i *dans les treillis des équivalences sur* I *et* Λ *respectivement.*

DÉMONSTRATION. – *a*) Posons $(N, p, \pi) = \rho_1 \cap \rho_2$. D'après la proposition 4.25, si $(N_1 \cap N_2\,;\, p_1 \cap p_2, \pi_1 \cap \pi_2)$ définit une congruence ρ, on a: $\rho \subseteq \rho_1 \cap \rho_2$. Montrons que c'est bien le cas. Soit $(i, j) \in p_1 \cap p_2$; pour tout $\lambda \in \Lambda$, $p_{\lambda i} = 0 \Leftrightarrow p_{\lambda j} = 0$; cela résulte, par exemple, de $(i, j) \in p_1$, par ailleurs $\begin{bmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \in N_1 \cap N_2$ car p_1 [resp. p_2]

est liée à N_1 [resp. N_2]. Donc $p_1 \cap p_2$ est liée à $N_1 \cap N_1$. Le même résultat vaut pour $\pi_1 \cap \pi_2$. Soient K, K_1 et K_2 les complexes réunions des classes des idempotents non nuls de $\rho_1 \cap \rho_2$, ρ_1, ρ_2 respectivement. Si $x \in K$, il existe un idempotent $e \in E \setminus 0$ tel que $(x, e) \in \rho_1 \cap \rho_2$ (prop. 3.5). Donc $x \in K_1 \cap K_2$; compte tenu des relations entre les complexes K et les sous-groupes normaux de G (th. 4.21, *b*)), $N \subseteq N_1 \cap N_2$. Par ailleurs $p \subseteq p_1 \cap p_2$ et $\pi \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$. Donc

$$\rho_1 \cap \rho_2 = (N;\ p,\ \pi) \subseteq (N_1 \cap N_2;\ p_1 \cap p_2,\ \pi_1 \cap \pi_2) = \rho.$$

b) Pour ce qui concerne $\rho_1 \vee \rho_2$, le principe de la démonstration est le même que précedemment. On montre d'abord que le triple $(N_1 \vee N_2;\ p_1 \vee p_2,\ \pi_1 \vee \pi_2)$ définit une congruence.
Supposons $(i, j) \in p_1 \vee p_2$. Il existe des indices $i_1 = i, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n = j$ tels que $(i_k;\ i_{k+1}) \in p_1 \cup p_2$. Il en résulte pour tout $\lambda \in \Lambda$:

$$p_{\lambda i} = 0 \Leftrightarrow p_{\lambda i_2} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow p_{\lambda i_{n-1}} = 0 \Leftrightarrow p_{\lambda i} = 0$$

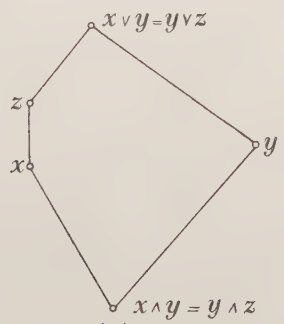
Pour tout λ, $\mu \in \Lambda$ et pour tout entier k, $1 \leq k < n$,

$\begin{bmatrix} i_k & i_{k+1} \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \in N_1 \cup N_2 \subseteq N_1 \cdot N_2$. Par conséquent :

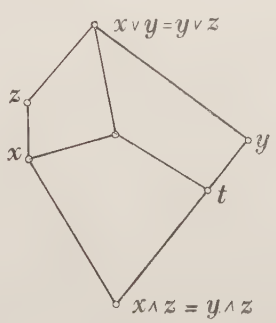
$$\prod_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} i_k & i_{k+1} \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \in N_1 \cdot N_2$$

(l'égalité relative au produit d'extraits résulte de la remarque suivant la définition 4.22). On démontre de la même façon, en utilisant la seconde relation sur les produits d'extraits que $\pi_1 \vee \pi_2$ est liée à $N_1 \cdot N_2$. En posant $\tau = (N_1 \cdot N_2;\ p_1 \vee p_2,\ \pi_1 \vee \pi_2)$ et en utilisant la proposition 4.25 on vérifie que $\tau = \rho_1 \vee \rho_2$.

D'après S. MACLANE ([35]), un treillis T $(\vee, \wedge)$ est dit semi-modulaire si pour tout $x, y, z \in T$, $y \wedge z < x < z < x \vee y$ implique qu'il existe $t \in T$ tel que



(A)



(B)

([35]) A lattice formulation for transcendance degrees and *p*-bases, Duke Math. J. 4 (1938) p. 455-68.

$y \setminus z < t \leq y$ et $x = (x \vee t) \wedge z$. Sous forme de diagramme, la semi-modularité signifie que tout diagramme (A), se complète en un diagrame (B).

Pour un treillis de longueur finie, la définition précédente est équivalente à la définition de BIRKHOFF de la $\vee$-semi-modularité ([1], chap VII): y couvre x, z couvre x, $y \neq z$, implique $y \vee z$ couvre z et $y \setminus z$ couvre y. Le treillis des équivalences d'un ensemble est semi-modulaire ([7], p. 265) et

THÉORÈME 4.26. - *Le treillis des congruences d'un demi-groupe complètement 0-simple est semi-modulaire.*

Il vérifie par conséquent la condition de chaîne de JORDAN-DEDEKIND: ceci a été prouvé par PRESTON [12].

DÉMONSTRATION. - Nous notons les congruences par des lettres latines. Supposons que pour des congruences x, y, z on ait: $y \cap z \subset x \subset z \subset x \vee y$. D'après les propositions 4.25 et 4.26:

$$(S) \quad \begin{cases} N_y \cap N_z \subseteq N_x \subseteq N_z \subseteq N_x \vee N_y \\ p_y \cap p_z \subseteq p_x \subseteq p_z \subseteq p_x \vee p_y \\ \pi_y \cap \pi_z \subseteq \pi_x \subseteq \pi_z \subseteq \pi_x \vee \pi_y . \end{cases}$$

D'après l'hypothèse sur les inclusions strictes, dans chaque colonne d'inclusions du système (S) figure au moins une inclusion stricte. Par suite de la modularité du treillis des sous-groupes normaux d'un groupe:

$N_x \cdot (N_y \cap N_z) = N_x \cdot N_y \cap N_z$ soit $N_x = N_z$. Pour les inclusions de la première ligne de (S) les possibilités sont indiquées en (1); pour les deuxième et troisième lignes les possibilités sont indiquées en (2, 3).

$$(1) \quad \begin{cases} \subset = \subset \\ \subset = = \\ = = \subset \\ = = = \end{cases} \qquad (2, 3) \quad \begin{cases} \subset \subset \subset \\ = = \subset \\ = = = \\ \subset = \subset \\ \subset = = \end{cases} .$$

(Pour (2, 3) les cas $p_y \cap p_z \subseteq p_x \subseteq p_z = p_x \vee p_y$ et $p_y \cap p_z = p_x \subseteq p_z \subseteq p_x \vee p_y$ se réduisent à $\subseteq = =$ et $= = \subseteq$ respectivement). D'après la restriction concernant les colonnes d'inclusion, l'une au moins des deux dernières lignes n'a que des inclusions strictes (sinon $x = z$, ce qui contredit l'hypothèse). Nous supposerons que c'est la deuxième ligne:

a) Si la troisième ligne n'a que des inclusions strictes, il existe une partition p de I et une partition π de Λ telles que:

$p_y \cap p_z \subset p \subseteq p_y$ et $p_x = (p_x \vee p) \cap p_z$ $\pi_y \cap \pi_z \subset \pi \subseteq \pi_y$ et $\pi_x = (\pi_x \vee \pi) \cap \pi_z$.

Le triple (N_y, p, π) définit une congruence t car $p \subseteq p_y$, $\pi \subseteq \pi_y$ et $N_x = (N_x \cdot N_y) \cap N_z$ (dans tous les cas) prouvent que t vérifie $y \cap z \subset t \subseteq y$ et $x = (x \vee t) \cap z$.

b) S'il y a des égalités dans la troisième ligne, en définissant une partition p de I comme précédemment, (N_y, p, π_y) définit une congruence t'; on vérifie que dans tous les cas $\pi_x = (\pi_x \vee \pi_y) \cap \pi_z$ d'où $y \cap z \subset t' \subseteq y$ et $x = (x \vee t') \cap z$.

Les cas où la troisième ligne n'a que des inclusions strictes se traite de la même façon.

COROLLAIRE 4.28. - *Soit $D = \mathfrak{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ un demi-groupe complètement 0-simple et P' la matrice déduite de P en remplaçant les éléments non nuls de P par l'élément unité de G. Le treillis des congruences sur D est modulaire si et seulement si P' a moins de 5 lignes identiques et moins de 5 colonnes identiques.*

Cela résulte immédiatement du fait que le treillis des équivalences sur un ensemble X est modulaire si et seulement si card. $X < 5$.

Pour un demi-groupe complètement simple $\mathfrak{M}(G; I, \Lambda; P)$ le treillis des congruences est modulaire si et seulement si card. $I < 5$ et card. $\Lambda < 5$. Dans le cas des demi-groupes complètement 0-simples tels que P' ait des rangées toutes distinctes (exemple: les demi-groupes de BRANDT) toutes les congruences propres sont plus fines que $\mathcal{H}$ et déterminées par un sous-groupe normal du groupe de base (cf. [24] pour le cas des demi-groupes de BRANDT).

4. - Autres applications des homomorphismes d'un demi-gronpe sur un demi-groupe complètement 0-simple.

Soit D un demi-groupe ayant un idéal bilatère minimum complètement simple. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, est que D ait au moins un idéal à droite minimal et un idéal à gauche minimal (Exemples: demi-groupes compacts, homogroupes, ...). LEFEBVRE a montré [14] que dans un tel demi-groupe le noyau est le réunion des complexes nets minimaux d'un côté. Ce résultat permet d'affirmer que les demi-groupes à noyau complètement simple constituent une généralisation des homogroupes de THIERRIN [34], où le noyau est un groupe formé par l'ensemble des zéroïdes (ou éléments nets d'un côté). Or dans un homogroupe H de noyau G et d'élément unitif e, l'application $x \to ex$ de H sur G est un homomorphisme laissant invariant les éléments de G. En ce qui concerne les demi-groupes D à noyau complètement simple N, existe-t-il un homomorphisme de D sur N, laissant fixe les éléments de N? Le théorème suivant répond à cette question. Signalons que lorsque D est compact, l'homomorphisme envisagé est une rétraction de D (cf. WALLACE [37]).

THÉORÈME 4.29. – *Soit D un demi-groupe à noyau complètement simple N. Il y a équivalence entre*:

1) *Il existe un homomorphisme φ de D sur N tel que $\varphi(k) = k$ pour tout $k \in N$*;

2) *Pour tout $e = e^2 \in N$, $f = f^2 \in N$, $ef = e$ [resp. $ef = f$] implique que pour tout $x \in D$, xe et xf [resp. ex et fx] sont dans le même sous-groupe maximal*;

3) *D est une bande rectangulaire d'homogroupes dont les noyaux sont les sous-groupes maximaux de N.*

DÉMONSTRATION 1) $\Rightarrow$ 2). – Si par exemple $ef = e$ pour deux idempotents e, $f \in N$, pour tout $x \in D$: $xe = \varphi(xe) = \varphi(x)\varphi(e) = \varphi(x)e$ et de même $xf = \varphi(x)f$. Comme $\varphi(x) \in N$ et $(e, f) \in \mathfrak{L}$ ($\mathfrak{L}$ est l'équivalence de GREEN sur N) on en déduit que $\varphi(x)e$ et $\varphi(x)f$ sont aussi $\mathfrak{L}$-équivalents. Mais $\varphi(x)e$, $\varphi(x)f$ et $\varphi(x)$ sont dans la même $\mathfrak{R}$-classe, donc $xe = \varphi(x)e$ et $xf = \varphi(x)f$ sont dans le même sous-groupe maximal de N. Dans la suite nous notons $G_{i\lambda}$ les sous-groupes maximaux et $e_{i\lambda}$ leur élément neutre.

2) $\Rightarrow$ 3). *a*) Montrons d'abord que pour tout k, $k' \in N$ et pour tout $x \in D$, $xk \in G_{i\lambda} \Rightarrow xk' \in G_{i\lambda'}$. Nous supposons que $k \in G_{j\lambda}$, $k' \in G_{j'\lambda'}$; $e_{j\lambda'}k = k$, et $xk = (xe_{j\lambda'})k$ implique $xe_{j\lambda'} \in G_{i\lambda'}$. Mais $e_{j\lambda'}e_{j'\lambda'} = e_{j\lambda'}$ implique $xe_{j'\lambda'} \in G_{i\lambda'}$ d'où $xk = xe_{j'\lambda}k' \in G_{i\lambda'}G_{j'\lambda'} \subseteq G_{i\lambda'}$. On démontre de la même façon que pour tout k, $k' \in N$ et pour tout $x \in D$: $kx \in G_{i\lambda} \Rightarrow k'x \in G_{i'\lambda}$.

b) Soit ρ la plus fine congruence zéro à gauche sur D (cf. définition 4.16) et $(a, b) \in \rho \cap (N \times N)$. Il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D$ tels que $aD|a_1D|\ldots|a_nD|bD$ d'où $aDk|a_1Dk|\ldots|a_nDk|bDk$ pour un élément k quelconque, $k \in N$ ... (1). Mais $a_iDk \subseteq a_iN$ et d'après *a*), a_iN est dans une $\mathfrak{R}$-classe de N. Il existe donc un idempotent $e_i \in N$ tel que pour tout $x \in D$, $k \in N$, $a_ixk = e_ia_ixk$. D'après (1) on a donc $aN|e_1a_1N|\ldots|e_na_nN|bN$; N étant complètement simple il en résulte $(a, b) \in \mathfrak{R}$. Donc $\rho \cap (N \times N) = \mathfrak{R}$ et de la même façon $\lambda \cap (N \times N) = \mathfrak{L}$ (λ est la plus fine congruence zéro à droite sur D et $\mathfrak{L}$ l'équivalence de GREEN sur N). Il en résulte que D est une bande rectangulaire d'homogroupes (les classes de $\rho \cap \lambda$) dont les noyaux sont les $\mathfrak{H}$-classes de N.

3) $\Rightarrow$ 1). A tout $x \in D$, on associe $\varphi(x) = e_{i\lambda}x$ où $e_{i\lambda}$ est l'élément neutre du noyau $G_{i\lambda}$ de l'homogroupe $C_{i\lambda}$ contenant x. Tout d'abord $e_{i\lambda}x = e_{i\mu}x$. En effet: $e_{i\lambda}x \in G_{i\lambda}$ et il existe $g \in G_{i\lambda}$ tel que $e_{i\lambda}x \cdot g = e_{i\lambda}$. Comme $xg \in G_{i\lambda}$, il en résulte $xg = e_{i\lambda}$. De même $e_{i\mu}x \in G_{i\mu}$ et il existe $g' \in G_{i\mu}$ tel que $xg' = e_{i\mu}$. On a: $(xgx)g' = e_{i\lambda}e_{i\mu} = (xg'x)g'$, d'où il résulte (puisque xgx et $xg'x$ sont dans $G_{i\lambda}$) $xgx = xg'x$, c'est-à-dire $e_{i\lambda}x = e_{i\mu}x$. Dans ces conditions, pour tout $x \in C_{i\lambda}$ et $y \in C_{j\mu}$, $\varphi(x)\varphi(y) = e_{i\lambda}xe_{j\mu}y = e_{i\lambda}xe_{j\lambda}y = e_{i\lambda}xy$ (car $e_{i\lambda}xe_{j\lambda} = e_{i\lambda}x$)
$= e_{i\mu}xy = \varphi(xy)$.

L'application φ est donc un homomorphisme de D sur N coïncidant avec l'identité sur N.

REMARQUES. – 1) La congruence d'homomorphisme est déterminée par le complexe $K = \{x\,;\ x \in D\colon \exists e = e^2 \in N,\ ex = xe = e\}$ et les congruences ρ et λ définies ci-dessus. K est réflectif, net et coupe chaque $(\rho \cap \lambda)$-classe suivant un sous-demi-groupe faiblement unitaire.

2) Dans le cas où D a un zéro (matriciel) et un idéal bilatère 0-minimal complètement 0-simple et contenu dans tout idéal non nul de D, on a un théorème analogue au précédent (cf. [6']).

Le théorème suivant donne la forme générale de la structure des demi-groupes 0-simples ayant un idéal 0-minimal d'un côté. Il constitue une légère amélioration d'un résultat de GLUSKIN [9].

THÉORÈME 4.30. – *Un demi-groupe D est 0-simple et a un idéal à gauche 0-minimal, si et seulement si il admet une décomposition (0)-matricielle dont les classes $C_{i\lambda}$ $(i \in I,\ \lambda \in \Lambda)$ vérifient $C_{i\lambda}a_{j\mu} = 0$ ou $C_{i\lambda}a_{j\mu} = C_{j\mu}$ pour tout $a_{j\mu} \in C_{j\mu}$. Si la décomposition (0)-matricielle est maximale (c'est-à-dire si elle correspond à la plus fine congruence (0)-matricielle) les classes $C_{i\lambda}$ de carré non nul sont soit toutes simples à gauche sans idempotents, soit toutes des groupes et dans ce dernier cas D est complètement 0-simple.*

DÉMONSTRATION. – Si D est 0-simple avec un idéal à gauche 0-minimal, D est réunion d'idéaux à gauche 0-minimaux ; pour $a,\ b \in D \setminus 0$, Da et Db sont de tels idéaux et $DaDb = Db \neq (0)$ (Cf. [9]) d'où $aDb \neq (0)$. De même si ab et bc sont non nuls, $Dab = Db \neq (0)$ et $Dbc = Dc \neq (0)$ d'où $Dabc = Dbc = Dc \neq (0)$; il en résulte $abc \neq 0$. Dans D, l'idéal (0) est matriciel ; soit $\Sigma_{(0)} \cap {}_{(0)}\Sigma$ la plus fine congruence (0)-matricielle sur D. Par suite de la minimalité des idéaux à gauche non nuls Dx, $Da - (0) \mid Db - (0)$ implique $Da = Db$; donc $(a, b) \in \Sigma_{(0)} \Leftrightarrow Da = Db$. Il en résulte que si L_λ est une $\Sigma_{(0)}$-classe non nulle, $L_\lambda \cup (0) = L_\lambda^0$ est un idéal à gauche 0-minimal. Supposons alors que pour $a_{j\mu} \in C_{j\mu}$ (classe de $\Sigma_{(0)} \cap {}_{(0)}\Sigma$), $C_{i\lambda}a_{j\mu} \neq 0$. En désignant par R_i la classe de ${}_{(0)}\Sigma$ contenant $C_{i\lambda}$ on a : $C_{i\lambda}a_{j\mu} = (R_i \cap L_\lambda)a_{j\mu} = R_i \cap L_\lambda a_{j\mu}$. Mais $L_\mu^0 = L_\lambda^0 a_{j\mu}$ (minimalité) donc $C_{i\lambda}a_{j\mu} = R_i \cap L_\lambda a_{j\mu} = R_i \cap L_\mu = C_{i\mu}$.

Réciproquement, si un demi-groupe D a une décomposition (0)-matricielle dont les classes $C_{i\lambda}$ vérifient la propriété de l'énoncé, D est 0-simple: en effet, soient $a \in C_{i\lambda}$, $b \in C_{j\mu}$. Il existe $\varkappa \in \Lambda$ tel que $C_{j\varkappa}C_{i\lambda} \neq 0$ et $k \in I$ tel que $C_{j\lambda}C_{k\mu} \neq 0$. D'après l'hypothèse $C_{i\varkappa}a = C_{j\lambda}$ et $C_{j\lambda}C_{k\mu} = C_{j\mu}$. D'où $C_{j\varkappa}aC_{k\mu} = C_{j\mu}$ Il en résulte que D est 0-simple ([2], lemme 2.28). On vérifie sans peine que $L_\lambda = (0) \cup (\bigcup_{i \in I} C_{i\lambda})$ est un idéal à gauche 0-minimal.

Si l'une des classes d'une décomposition (0)-matricielle de D contient un idempotent $e \neq 0$, e est primitif car $ef = fe = f \neq 0$ implique $Df = Dfe \subseteq De$, d'où $Df = De$ (De est 0-minimal) et $ef = e = f$; D est donc complètement 0-simple. Dans le cas contraire, si une classe $C_{i\lambda}$ est un sous-demi-groupe, $C_{i\lambda}a_{i\lambda} = C_{i\lambda}$ et $C_{i\lambda}$ est simple à gauche sans idempotents.

Ce théorème permet de montrer que dans un anneau A sans idéaux nilpotents ayant un idéal à gauche (0)-minimal L, $K = LA$ est un idéal complètement 0-simple du demi-groupe multiplicatif de A, dont les $\mathcal{H}$-classes sont des sous-anneaux de A (en particulier les $\mathcal{H}$-classes groupes sont des sous-corps).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. XXV (1961).

[2] A. H. CLIFFORD - G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, vol. I - Providence, Amer. Math. Soc. (1961).

[3] A. H. CLIFFORD, *Semigroups admitting relative inverses*, Annals of. Math. 42 (1941), pp. 1037-1049.

[4] R. CROISOT, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, Ann. Sc. Ec. Nor. Sup. 70 (1953), pp. 361-379.

[5] P. DUBREIL, *Algèbre*, Tome I. - Paris, Gauthiers-Villars (1954).

[6] — —, *Contribution à la théorie des demi-groupes (II)*, Rend. Mat. Appl. 10 (1951), pp. 183-200.

[7] M.-L. DUBREIL-JACOTIN - L. LESIEUR - R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis*, Paris, Gauthiers-Villars (1953).

[8] L. M. GLUSKIN, *Demi-groupes complètement simples* [*en russe*], Uceb. Zap. Karkov ped. in ta 18 (1956). (R. J. Mat. 1957, 1, 163).

[9] — —, *Demi-groupes et anneaux d'endomorphismes d'un espace vectoriel* [*en russe*], Izv. Akad. Nauk SSSR 23 (1959), pp. 841-870.

[10] J. A. GREEN, *On the structure of semigroups*, Annals of Math. 54 (1951), pp. 163-172.

[11] P. A. GRILLET, *Homomorphismes principaux de tas et de groupoides*, Thèse Sc. Math. Paris (1965),

[12] J. M. HOWIE, *Congruences on semigroups*, Pennsylvania State University, Algebra Institute (cours de G. B. Preston), (1963).

[13] — —, *The maximum idempotent-separating congruence on an inverse semigroup*, Proc. Edinburgh Mat. Soc. 14 (1964), pp. 71-79.

[14] P. LEFEBVRE, *Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes*, Annali di Mat. pura et Appl. 59 (1962), pp. 77-164.

[15] E. S. LJAPIN, *Demi-groupes* [*en russe*], Moscou, 1960. Trad. angl., Semi-groups. Amer. Math. Soc. Trans. math. monog., (1963).

[16] — —, *Sur la représentation d'un demi-groupe par des transformations partielles* [*en russe*], Mat. Sbornik 52 (1960), pp. 589-596.

[17] A. I. MAL'CEV, *Groupoïdes symétriques* [*en russe*], Mat. Sbornik 31 (1952), pp. 136-151.

[18] D. D. MILLER - A. H. CLIFFORD, *Regular $\mathcal{D}$-classes in semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), pp. 270-280.

[19] W. D. MUNN, *Brandt congruences on inverse semigroups*, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), pp. 154-164.

[20] — —, *A certain sublattice of the lattice of congruences on a regular semigroup*, Proc. Cambridge Phil. Soc. (1964), 60, pp. 385-391.

[21] M. PETRICH, *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), pp. 342-344.

[22] G. B. PRESTON, *Inverse semigroups*, J. London Math Soc. 29 (1954), pp. 396-403.

[23] — —, *Matrix representations of semigroups*, Quarterly J. Math. Oxford 9 (1958), pp. 169-176.

[24] — —, *Congruences on Brandt semigroups*, Math. Annalen 139 (1959), pp. 91-94.

[25] — —, *Congruences on completely o-simple semigroups*, Proc. London Math. Soc. 11 (1961), pp. 557-576.

[26] D. REES, *On semigroups*, Proc. Cambridge Phil. Soc. (1940), pp. 387-400.

[27] B. M. ŠAIN, *Plongement d'un demi-groupe dans un groupe généralisé* [*en russe*], Mat. Sbornik 55 (1961), pp. 379-400.

[28] — —, *Sur les représentations transitives d'un demi-groupe*, Usp. Mat. Nauk. 18 (3) (1963), pp. 215-222.

[29] M. P. SCHÜTZENBERGER, *$\overline{D}$-représentations des demi-groupes*, C. R. Acad. Sc. Paris. 244 (1957), pp. 1994-1996.

[30] — —, *Sur la représentation monomiale des demi-groupes*, C. R. Acad. Sc. Paris 246 (1958), pp. 865-867.

[31] S. SCHWARZ, *Semigroups satisfying some weakened forms of the cancellation law*, Mat. Fyz. Casopis 6 (1956), pp. 149-158.

[32] — —, *A semigroup treatment of some theorems on non negative matrices*, Czech. Math. J. 15 (90) (1965), pp. 212-229.

[33] A. K. SUSCHKEWITCH, *Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkerbarkeit*, Math. Annalen 99 (1928), pp. 30-50.

[34] G. THIERRIN, *Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes*, Bull. Soc. Math. France 83 (1955), pp. 103-159

[35] E. J. TULLY, *Representation of a semigroup by transformations acting transitively on a set*, Amer. J. Math. 83 (1961), pp. 533-541.

[36] V. V. VAGNER, *Théorie des amas généralisés et des groupes généralisés* [*en russe*], Mat. Sbornik 32 (1953), pp. 545-632.

[37] A. D. WALLACE, *Retraction in semigroups*, Pacific J. Math. 7 (1957), p. 1513.1517.

[38] M. YAMADA, *On the greatest semilattice decomposition of a semigroup*, Kōdai Math. Sem. Rep. 7 (1956), pp. 59-62.

Certaines parties de ce travail ont été résumées ou développées dans les articles suivants:

[1'] G. LALLEMENT, *Sur les homomorphismes d'un demi-groupe complètement o-simple*, C. R. Acad. Sc. Paris, 258 (1964), pp. 3609-3612.

[2'] — —, *Décompositions matricielles et homomorphismes d'un demi-groupe*, C. R. Acad. Sc. Paris 259 (1964), pp. 273-276.

[3'] — —, *Congruences et équivalences de Green sur un demi-groupe régulier*, C. R. Acad. Sc. Paris 262 (1966), pp. 613-616.

[4'] G. LALLEMENT - M. PETRICH, *Some results concerning completely o-simple semigroups*, Bull. Amer. Soc. (1964) 70, pp. 770-778.

[5'] J. M. HOWIE - G. LALLEMENT, *Certain fundamental congruences on a regular semigroup*, Proc. Glasgow Math. Ass. (1966) 7 (3), pp. 145-159.

[6'] G. LALLEMENT - M. PETRICH, *Décompositions I-matricielles d'un demi-groupe*, Journal de math. pures et appl., 45 (1966), pp. 67-117.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction . . . . . p. 47

CHAPITRE I.: Représentation complètes d'un demi-groupe par des transformations partielles sur un ensemble . . . . . » 50

CHAPITRE II.: Translations partielles. Représentation canonique des demi-groupes réguliers. Problèmes de structure . . . . . » 68

CHAPITRE III.: Congruences sur les demi-groupes réguliers . . . . . » 90

CHAPITRE IV.: Demi-groupes complètement 0-simples . . . . . » 107

Bibliographie . . . . . » 128

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé

Paris, le 24.5.....19.66

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Marc ZAMANSKY

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b bologna italy